नवाचारों से गुणवत्तापूर्ण शिक्षा एवं शैक्षिक विकास की ऐतिहासिक पहल...

शेखावाटी मिशन – 100

विषय : गणित (कक्षा – X)

| कार्यालय |

संयुक्त निदेशक स्कूल शिक्षा, चूरु संभाग, चूरु (राजस्थान)

Email Id : mission100shekhawati@gmail.com
Help Line :01562-250439

150 YEARS OF CELEBRATING THE MAHATMA

''हमारा प्रत्येक विद्यार्थी स्पष्ट बोले, सही पढ़े व शुद्ध लिखे''

गोविन्द सिंह डोटासरा

राज्यमंत्री
शिक्षा (प्राथमिक एवं माध्यमिक शिक्षा) विभाग
(स्वतंत्र प्रभार) पर्यटन एवं देवस्थान विभाग

माननीय शिक्षा मंत्री की कलम से

सम्मानित शिक्षक साथियों,

हम सभी के लिए गौरव का विषय है कि राजस्थान शिक्षा के क्षेत्र में नित नये आयाम छू रहा है। इसी परम्परा को अग्रसर रखते हुए विगत सत्रों की भाँति इस सत्र में शेखावाटी ''मिशन–100'' मुहिम का आगाज संयुक्त निदेशक परिक्षेत्र चूरू द्वारा किया जा रहा है। जिसमें अनुभवी, कर्मठ विद्वान विषयाध्यापकों की लगन और मेहनत से तैयार विषय वस्तु, ब्ल्यू प्रिन्ट बोर्ड परीक्षा परिणाम उन्नयन के मद्देनजर विद्यार्थियों तक पहुँचाया जा रहा है।

मैं इन सभी विषयाध्यापकों की कर्मठ टीम को धन्यवाद ज्ञापित करता हूँ जिन्होनें अपनी दिन–रात की अथक मेहनत, लगन एवं समर्पित कार्यशैली से इस सकारात्मक कार्य को अंजाम दिया है। **मेरा सभी संस्था प्रधानों से आग्रह है कि वे सभी विषयाध्यापकों से समन्वय कर इस परीक्षा उपयोगी सामग्री को विद्यार्थियों तक पहुँचाना सुनिश्चित करें। साथ ही शिक्षक साथियों से अनुरोध है कि इस विषय वस्तु को ''मिशन–100'' के अनुरुप 100 प्रतिशत विद्यार्थियों तक पहुँचायें एवं तद्नुरुप तैयारी भी करवायें।**

आशा करता हूँ कि आपका प्रयास न केवल शेखावाटी क्षेत्र के लिए, बल्कि पूरे प्रदेश में विद्यार्थियों के लिए एक नवाचार होगा जो उनके लक्ष्यों की प्राप्ति में सहायक होगा। शिक्षा विभाग में आपका प्रयास शिक्षा के क्षेत्र में गुणात्मक रुप से मूल्यपरक शिक्षा हेतु वृद्धिकारक होगा, जो प्रदेश को देश में सर्वोपरि स्थान दिलाने में कारगर साबित होगा।

शुभकामनाओं सहित

गोविन्द सिंह डोटासरा

राज्यमंत्री
शिक्षा (प्राथमिक एवं माध्यमिक शिक्षा) विभाग
(स्वतंत्र प्रभार) पर्यटन एवं देवस्थान विभाग

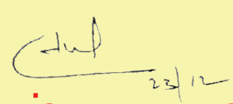
शुभकामना संदेश

मुझे यह जानकर प्रसन्नता हुई है कि संयुक्त निदेशक स्कूल शिक्षा,चूरू संभाग, चूरू के नेतृत्व में **'शेखावाटी मिशन – 100'** के तहत माध्यमिक तथा उच्च माध्यमिक परीक्षा 2020 में शामिल होने वाले विद्यार्थियों हेतु बोर्ड परीक्षा उपयोगी विषय वस्तु एवं प्रश्न कोश तैयार किया जा रहा है।

बोर्ड परीक्षा में उच्चतम अंक प्राप्त करना प्रत्येक विद्यार्थी की अपेक्षा होती है इस दृष्टि से शेखावाटी मिशन–100 द्वारा तैयार की गई विषय वस्तु एवं प्रश्नकोश विद्यार्थियों के लिए उपयोगी एवं मार्गदर्शक सिद्ध होगा।

प्रश्न कोश के निर्माण में जिन विषय विशेषज्ञ शिक्षकों ने अपना विशिष्ट योगदान दिया है, निसंदेह विद्यार्थियों के सफल हो जाने पर उन्हें जो आंतरिक सुख और संतोष मिलेगा ये सुखद क्षण उनकी स्मृति के अविस्मरणीय पलों में सुरक्षित रहेंगे। प्रश्नकोश निर्माण में जिन भामाशाहों का योगदान रहा है उन्हें भी सकारात्मक पहल के लिए धन्यवाद।

सभी के उज्जवल भविष्य की कामना के साथ...



हिमांशु गुप्ता IAS
निदेशक
माध्यमिक शिक्षा राजस्थान
बीकानेर

शुभकामना संदेश

श्रीमान् संयुक्त निदेशक, स्कूल शिक्षा, चूरू की ओर से शुभ कामना संदेश
संयुक्त निदेशक, स्कूल शिक्षा, चूरू कार्यालय के लिए बेहद प्रसन्नता एवं गर्व का विषय है कि शिक्षा विभाग चूरू संभाग में कार्यरत सभी विद्वान साथियों के सहयोग से चूरू संभाग ने पिछले बोर्ड परीक्षा परिणामों तथा इन्सपायर अवार्ड में उच्च पायदान पर स्थान प्राप्त किया है। विगत वर्षो की भांति इस बार भी **'शेखावाटी मिशन–100** को जारी रखते हुए इसमें विद्यार्थियों की रूचि के आधार पर छोटे–छोटे प्रश्नों की उत्तर सहित सरल एवं रूचिकर सामग्री अनुभवी विषय विशेषज्ञों की टीम द्वारा तैयार करवाते हुए एक नवीन नवाचार करने का प्रयास किया गया है।

शिक्षा विभाग में बोर्ड परीक्षा में जुटी पूरी टीम से मेरा निवेदन है कि, **शेखावाटी मिशन–100** में तैयार विषयवस्तु को प्रत्येक विद्यार्थी तक पहुँचातें हुए उसकी तैयारी करवाने का हर सम्भव प्रयास करें ताकि पूर्व की भांति इस बार भी संख्यात्मक एवं गुणात्मक रूप से बोर्ड परीक्षा परिणाम में वृद्धि हो सके।

सुरेन्द्र सिंह गौड़
संयुक्त निदेशक
स्कूल शिक्षा, चूरू संभाग, चूरू

शैक्षिक प्रकोष्ठ अनुभाग, संयुक्त निदेशक कार्यालय, चूरू का एक निवेदन

माननीय शिक्षा मंत्री महोदय ने राजस्थान की शिक्षा व्यवस्था में गुणात्मक उन्नति एवं बोर्ड परीक्षा उन्नयन हेतु शिक्षा एवं शिक्षण पद्वति में नवाचारों के प्रभावी प्रयोग एवं अपेक्षित परिवर्तन की आवश्यकता महसूस की है। मंत्री महोदय का कहना है कि विद्यालय में ऐसी व्यवस्था एवं वातावरण तैयार होना चाहिए कि हमारा प्रत्येक विद्यार्थी स्पष्ट बोले, सही पढे व शुद्व लिखे।

उनका मानना है कि जिनको बोलना व लिखना आता है वे सफल इन्सान हैं। एक संस्था प्रधान व विषय अध्यापक यह दोनों कौशल अपने विद्यार्थियों में भाषा के ज्ञान प्रार्थना सभा, बाल सभा, उत्सवों, सांस्कृतिक कार्यक्रमों, भाषण, वाद–विवाद प्रतियोगिताओं आदि के द्वारा उत्पन्न कर सकता है।

माननीय निदेशक महोदय ने भी अपने पत्र दिनांक 24.09.19 एवं 13.11.19 के द्वारा बोर्ड परीक्षा उन्नयन एवं गुणात्मक अभिवृद्वि हेतु प्रभावी निर्देशन एवं सम्बलन प्रदान किया है। इस क्रम में निदेशक महोदय ने निदेशालय स्तर से बोर्ड परीक्षा तैयारी हेतु "प्रयास" के रूप में बहुत ही उपयोगी एवं महत्वपूर्ण विषय वस्तु विद्यार्थियों के लिए उपलब्ध करायी है। इसके साथ ही एक निर्धारित कार्यक्रमानुसार प्री–बोर्ड परीक्षा के रूप में परीक्षा तैयारी का वातावरण तैयार करने के निर्देश जारी किये हैं।
पिछले शैक्षणिक सत्रों में शिक्षा विभाग द्वारा कई नवाचार किए गए जिनसे अभूतपूर्व परिणाम प्राप्त हुए हैं। सत्र 2017–18 में चूरू सम्भाग के तत्कालीन उप निदेशक डॉ. महेन्द्र चौधरी के निर्देशन में 'शेखावाटी मिशन–100' शुरू किया गया था जिसके परिणामस्वरूप 10वीं एवं 12वीं बोर्ड परीक्षाओं का परिणाम बहुत शानदार रहा। सत्र 2019–20 में चूरू सम्भाग का सीकर जिला 10वीं के परीक्षा परिणाम में प्रथम रहा, झुन्झुनूं द्वितीय एवं चूरू सातवें स्थान पर रहा। इसी प्रकार 12वीं विज्ञान में सीकर द्वितीय, झुन्झुनूं 5वें एवं चूरू 9वें स्थान पर रहा। आपके व वर्तमान संयुक्त निदेशक श्रीमान् सुरेन्द्र सिंह गौड़ के मार्गदर्शन व प्रेरणा से संयुक्त निदेशक कार्यालय के शैक्षिक प्रकोष्ठ अनुभाग ने इस वर्ष भी नवाचार करते हुए बोर्ड परीक्षा 2020 हेतु विषय सामग्री तैयार करवाई है। प्रायः यह देखा गया है कि निबन्धात्मक एवं बड़े प्रश्न सामान्य विद्यार्थियों को याद करने में कठिनाई होती है तथा भूलने की सम्भावना रहती है। इसे ध्यान में रखते हुए "शेखावाटी मिशन–100" की अनुभवी विषय विशेषज्ञों की टीम ने ब्लूप्रिंट के आधार पर विषय वस्तु को छोटे–छोटे प्रश्नों में विभक्त कर उनके उत्तर सहित विषय सामग्री तैयार की हैं। छोटे–छोटे प्रश्नोत्तरों के रूप में तैयार यह विषय सामग्री इस बार भी बोर्ड परीक्षा 2020 के लिए उपयोगी एवं मददगार साबित होगी। अगले सत्र 2020–21 के प्रारम्भ होने के साथ ही इसे कक्षा कार्य के रूप में प्रत्येक विषय अध्यापक शुरू करे तो माननीय शिक्षा मंत्री महोदय एवं निदेशक महोदय की भावनाओं के अनुरूप शिक्षण पद्वति में गुणात्मक उन्नति के साथ अपेक्षित परिवर्तन लाया जा सकता है।

अधिकांश प्रतियोगी परीक्षाओं मे 10वीं एवं 12वीं तक के पाठ्यक्रम से ही सामान्य ज्ञान के प्रश्न पूछे जाते हैं। अतः यह विषय सामग्री विद्यार्थियों का सामान्य ज्ञान बढाने में भी मददगार साबित होगी।
विद्यालय में नामांकन अभिवृद्धि, शिक्षण में गुणात्मक उन्नति एवं बोर्ड परीक्षा परिणाम को संख्यात्मक व गुणात्मक रूप से बढाने के लिए अगले स़त्र के प्रारम्भ से ही इस नवाचार को शुरू करने हेतु कुछ विचार अनुभव की पाठशाला से सीखे हैं।

साथियों एक संस्था प्रधान तथा एक विषय अध्यापक होने के नाते हमारे जेहन में नवाचार के आइडिया सुबह की चाय की एक–एक घूंट के साथ पनपे, और हम उस स्वप्न को साकार करने में उसी वक्त जुट जाएं तो दुनिया के सबसे बड़े मन्दिर या मस्जिद हमारे शिक्षा (सरस्वती) के मन्दिर के हम पुजारी सब कुछ सम्भव बना सकते हैं। भगवान के मन्दिर में भगवान को पुजारी ही पूजवाता है, ठीक उसी प्रकार हम अध्यापकों को विद्या के मन्दिर को पूजवाना है। कुछ प्रमुख विचार मेरे चिन्तन में एक संस्था प्रधान/विषय अध्यापक होने की कल्पना के रूप में पनप रहे हैं, जिन्हें आपके समक्ष प्रस्तुत कर रहा हूँ:–

1. मैं संस्था प्रधान/विषय अध्यापक "शेखावाटी मिशन 100" द्वारा तैयार की गई विषय सामग्री को प्रार्थना सभा, बाल सभा तथा खाली कालांश में ग्रुप बनाकर क्विज प्रतियोगिता, होम प्रोजेक्ट आदि के रूप में याद करवाने का वातावरण तैयार कर बोर्ड परीक्षा की तैयारी सुनिश्चित करूँगा।
2. मैं भाषा (हिन्दी/अंग्रेजी या संस्कृत) का अध्यापक हूँ, इसलिए सत्र के प्रारम्भ में पहले दिन ही कक्षा कार्य की कॉपी में कक्षा स्तर के अनुरूप 50 से अधिक महत्वपूर्ण, विशेष, सामान्य से हटकर अर्थात् भारी शब्द अर्थ सहित लिखवाऊँगा जिससे मेरे विद्यार्थी की भाषागत दक्षता जैसे बोलना, पढना व लिखना प्रभावशाली एवं आकर्षक बने। सतत अभ्यास, नियमित परख, प्रोत्साहन से विद्यार्थी की भाषा दक्षता में उच्च स्तरीय क्षमता विकसित करूँगा।
3. मैं संस्था प्रधान/विषय अध्यापक यह नवाचार अगले सत्र प्रारम्भ से ही शिक्षण कार्य के दौरान प्रत्येक पाठ/विषय–वस्तु पूर्ण होते ही ऐसे छोटे–छोटे अति लघु/लघूत्तरात्मक प्रश्न उत्तर सहित कक्षा कार्य के रूप में तैयार करवाते हुए यह व्यवस्था बनाऊँगा कि मेरे अवकाश पर रहने या अन्य कार्य में लगा होने या खाली कालांश में उस पाठ्य सामग्री को कक्षा के ग्रुप (टीम ए व बी) के मध्य क्विज प्रतियोगिता कक्षा मॉनिटर के माध्यम से आयोजित हो। इससे विषय का रिवीजन होगा, खाली कालांश नहीं रहेगा, विद्यार्थियों में अनुशासन व खुली प्रतिस्पर्धा की भावना के साथ शैक्षणिक वातावरण का निर्माण होगा।
4. मैं मेरे विद्यार्थी को देश, समाज से जुड़े नवीन घोषणाओं, घटनाओं आदि से अवगत करवाऊँगा तथा उनके प्रति लेखन, भाषण कला को विकसित करूँगा। आम आदमी के रोजमर्रा के जीवन से जुड़े टॉपिक जैसे सिंगल यूज प्लास्टिक–ना बाबा ना, स्वच्छ भारत मिशन, दहेज प्रथा, बाल विवाह, बालश्रम, कन्या भ्रूण हत्या, रेगिंग, ऊर्जा के वैकल्पिक स्रोत, महिला अधिकार, कानून की सामान्य जानकारियाँ, सड़क सुरक्षा आदि का समुचित ज्ञान कराऊँगा। हिन्दी/अंग्रेजी भाषा में इन मुद्दों पर प्रभावशाली शब्दों और विचारो से युक्त निबंध लेखन, वाद–विवाद, आशु भाषण आदि हेतु प्रेरित करूँगा। जिस दिन मैं अवकाश पर रहूँ या अन्य कार्यवश कक्षा अध्यापन नहीं करवा पाऊँ, उस दिन किसी एक विषय पर विद्यार्थियों से रेन्डमली निबंध लिखवाऊँगा और समय पर उसकी जाँच करके उचित निर्देशन प्रदान करूँगा।
5. संस्था प्रधान होने के नाते मैं अवकाश पर जाने वाले शिक्षकों से प्रार्थना पत्र के साथ ही प्रत्येक कक्षा हेतु सम्बन्धित विषय सामग्री देने हेतु निर्देशित करूँगा ताकि उक्त कालांश में विद्यार्थियों को कक्षा कार्य करवाया जाए, जैसे– पेपर लेना, चित्र बनाना, आरेख बनाना, डिबेट करना, अन्त्याक्षरी करवाना आदि। ये कार्य मॉनिटर के माध्यम से सम्पन्न करवाये जा सकते है।
6. मैं विज्ञान का अध्यापक हूँ अतः अपनी जेब में रखे पैन के साथ रखे पैन ड्राइव से सम्बन्धित विषय के विडियो/पीपीटी द्वारा शिक्षण को प्रभावशाली बनाऊँगा। विद्यालय विज्ञान प्रयोगशाला का भरपूर उपयोग करूँगा तथा विद्यार्थियों में वैज्ञानिक दृष्टिकोण विकसित करूँगा।
7. मैं विद्यार्थियों को अपनी दैनिक डायरी लिखने हेतु प्रेरित करूँगा इससे उनमें नियमितता, अनुशासन की भावना तथा लिखने व बोलने की क्षमता उत्पन्न करने में सहायता मिलेगी, इससे हमारा प्रत्येक विद्यार्थी "स्पष्ट बोले, सही पढें व शुद्व लिखे" कथन भी सार्थक होगा।
8. मैं संस्था प्रधान होने के नाते विद्यार्थियों एवं स्टाफ सदस्यों हेतु मोटिवेशनल विडियोज का कलेक्शन करके समय–समय पर दिखाऊँगा ताकि उनमें नयी ऊर्जा, लगन का संचार होता रहे। मैं संस्था प्रधान होने के नाते सभी सहशैक्षणिक गतिविधियों जैसे – विभिन्न जयन्तियों, राष्ट्रीय उत्सव, स्वच्छ भारत मिशन, भाषण, वाद–विवाद, प्रतियागिताएँ आदि रूचिपूर्वक आयोजित करवाऊँगा।
9. एक संस्था प्रधान होने के नाते मैं विद्यार्थी के सर्वांगीण विकास की रूपरेखा अपने जेहन में रखूँगा तथा उसे अमली जामा पहनाने के लिए सदैव प्रयासरत रहूँगा।

"शेखावाटी मिशन 100" टीम के विषय अध्यापको ने अल्प समय में विषय वस्तु को तैयार किया है। इसमें प्रश्नोत्तरों, लेखन, भाषा, टंकण जैसी त्रुटियां सम्भव है। सभी विषय अध्यापको से निवेदन है कि वे अपने स्तर पर ठीक करते हुए विद्यार्थियों तक पहुॅचाने का कष्ट करेंगे तथा संशोधन हेतु "शेखावाटी मिशन 100" टीम को आवश्यक फीड बैक प्रदान करेंगे। आपके प्रयास से प्रदेश में परीक्षा परिणाम संख्यात्मक व गुणात्मक रूप से बढे।

मैं सयुक्त निदेशक कार्यालय चूरू की ओर से प्रयास संस्थान सीकर का विशेष रूप से आभार व्यक्त करता हूँ, जिनके आर्थिक सहयोग से इस सम्पूर्ण सामग्री का प्रकाशन सम्भव हो सका है।

शुभकामनाओं सहित।

ओमप्रकाश फगेड़िया

अति.जि.शि.अ.एवं शैक्षिक प्रकोष्ठ प्रभारी
कार्यालय, संयुक्त निदेशक (स्कूल शिक्षा)
चूरू सम्भाग, चूरू

शेखावाटी मिशन – 100

बोर्ड परीक्षा परिणाम उन्नयन कार्यक्रम सत्र–2019–20
माध्यमिक परीक्षा – 2020
विषय –गणित

सर्वश्रेष्ठ संकलन, सर्वश्रेष्ठ सफलता सुनिश्चित करने हेतू।

संयोजक – श्री विकास फेनिन
रा.उ.मा.वि.लालासी, लक्ष्मणगढ़ (सीकर)
मो. 9461055911

सह–संयोजक – श्रीमति तरूणा आर्य
रा.सर्व.बा.मा.पुत्री.पाठ्शाला, चूरू

सदस्य–श्री शीशराम कटारियाँ
रा.उ.मा.वि. बलाराँ (सीकर)
मो. 8432430037

सदस्य – सुश्री विनीता
श्री जे.के. रा.उ.मा.वि. अलसीसर (झुंझुनूं)

मार्ग दर्शक– श्री पवन कुमार वर्मा
(प्रधानाचार्य, हाल संयुक्त निदेशक, (मा.शि.)
चूरू संभाग, (चूरू)
मो. 9414541229

सदस्य – श्री महावीर प्रसाद नेहरा
रा.उ.मा.वि. कांसली (सीकर)
मो. 9784350847.

सदस्य – सुश्री चित्ररेखा सैनी
रा.आ.उ.मा.वि. सहजुसर (चूरू)

कार्यालयः– संयुक्त निदेशक स्कूल शिक्षा, चूरु संभाग, चूरु (राजस्थान)

कार्यालय संयुक्त निदेशक (स्कूल शिक्षा) चूरू संभाग, चूरू

शेखावाटी मिशन–100

संदेश

बोर्ड परीक्षा परिणाम विद्यार्थी के भविष्य की दशा और दिशा निर्धारित करता है। इसलिए विद्यार्थी व अभिभावक का तनावग्रस्त होना स्वाभाविक है। प्रत्येक विद्यार्थी परीक्षा में अच्छे अंक लाने हेतु अपनी तरफ से वर्षभर कक्षा शिक्षण, गृहकार्य व नोट्स तैयार कर तैयारी करता है। परंतु परीक्षा से पूर्व का समय बहुत महत्त्वपूर्ण होता है। अच्छे अंक प्राप्त करने के लिए एक रणनीति बनाकर तैयारी करना आवश्यक होता है। विद्यार्थी ने वर्षभर में क्या और कितना पढ़ा यह तो महत्त्वपूर्ण होता ही है किन्तु इससे ज्यादा महत्त्व रखता है कि परीक्षा कक्ष में विद्यार्थी ने अपने आत्मविश्वास को बनाये रखकर परीक्षा दी हो। परीक्षा के फोबिया से दूर रहते हुए विद्यार्थी तैयारी कर सकें, इस हेतु शेखावाटी मिशन –100 गणित की टीम द्वारा यह पाठ्य सामग्री तैयार की गई है।अध्ययन सामग्री को इस प्रकार बनाया गया है कि सभी स्तर के विद्यार्थीयों को लाभांवित किया जा सके। हमें विश्वास है कि निश्चित रूप से इस पाठ्य सामग्री को पढ़कर आपको सफलता मिलेगी। बोर्ड परीक्षा परिणाम में संख्यात्मक व गुणात्मक सुधार के लिए यह एक प्रयास है।

प्रस्तुत पाठ्य सामग्री में परीक्षा की तैयारी हेतु उपयोगी जानकारी व महत्त्वपूर्ण प्रश्नोत्तर प्रस्तुत किए गए हैं। हमारा सुझाव है कि आप इस पाठ्य सामग्री को मन लगाकर पढ़ें और अपनी परीक्षा की रणनीति तैयार करें।

Note : **समय अभाव में तैयार पाठ्य सामग्री में यदि तकनीकी त्रुटि हो तो विषय अध्यापक सुधार करवायें एवं ई–मेल पर फिडबैक जरूर देवें।**

"आपके उज्ज्वल भविष्य की शुभकामनाओं के साथ।"

कार्यालय संयुक्त निदेशक (स्कूल शिक्षा) चूरू संभाग, चूरू

ईकाई वार अंक विभाजन

विषयः– गणित कक्षा – X

क्र.सं.	ईकाई	अंकभार	प्रश्नों का प्रकार एवं उनके अंक				
			अति.लघु.	लघु.	लघु. **II**	निबन्धात्मक	कुल
1	वैदिक गणित	4	1(2)	2(1)	-	-	4(3)
2	संख्या पद्धति	3	1(1)	2(1)	-	-	3(2)
3	बीज गणित	12	-	3(2)	-	6(1)	12(3)
4	त्रिकोणमिति	11	1(2)	-	3(1)	6(1)	11(4)
5	निर्देशांक ज्यामिति	6	-	-		6(1)	6(1)
6	ज्यामिति	20	1(2)		3(4)	6(1)	20(7)
7	क्षेत्रमिति	10	-	2(2)	3(2)	-	10(4)
8	सांख्यिकीय व प्रायिकता	10	1(1)	-	3(1)	6(1)	10(3)
9	सड़क सुरक्षा शिक्षा	4	1(2)	2(1)	-	-	4(3)

प्रश्नावली–1

वैदिक गणित अंकभार–4

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न	2(अंकभार'–1)
लघुत्तरात्मक प्रश्न	1(अंकभार–2)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न अंकभार–1

प्रश्न–1. उपसूत्र यावदूनम तावदूनी द्वारा 93 का वर्ग ज्ञात करें।

हल :– 93 = 9(93+3) / 3^2 आधार = 10

= 9(96) / 9   उपआधार = 10×9=90

= 864 / 9   विचलन = +3

= 8649

प्रश्न–2. उपसूत्र यावदूनम् द्वारा 17 का वर्ग ज्ञात करें।

हल :– 17 = 1(17+7) / $(7)^2$ आधार = 10

= 1(24) / 49   विचलन = +7

= 1(24+4) / 9

= 1(28) / 9

= 28 / 9

= 289

प्रश्न–3. सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा गुणा करो।

(i) $31\frac{1}{6} \times 31\frac{5}{6}$ (ii) 103×197

हल :– (i) $31\frac{1}{6} \times 31\frac{5}{6}$

= $31 \times 32 / \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$

= $992 / \frac{5}{6}$

= $992\frac{5}{6}$

हल :– (ii) 103×197 (आधार=100)

= 1×2 / 03×97

= 2 / 291

= 2 / 0291

= 20291

प्रश्न–4. द्वन्द्व योग द्वारा 62 का वर्ग ज्ञात करो।

हल :– 6 का द्वन्द्व / 62 का द्वन्द्व / 2 का द्वन्द्व

= $6^2 / 2 \times (6 \times 2) / 2^2$

= $36 / 2 \times 12 / 4$

= 36 / 24 / 4

= 36 / $_2$4 / 4

= 3844

प्रश्न–5. सूत्र शून्य साम्य समुच्चय द्वारा समीकरण हल करो।

(I) $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+7}$

(II) $\frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-6} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-8}$

हल :– (i) $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+7}$

वाम पक्षों के हरो का योग

$= x+2+x+6 = 2x+8 \ldots\ldots\ldots\ldots.(i)$

दक्षिण पक्ष के हरो का योग

$= x+1+x+7 = 2x+8 \ldots\ldots\ldots\ldots.(ii)$

दोनो समुच्चय समान होने पर $2x+8=0$

$$x = \frac{-8}{2} = -4$$

(ii) वाम पक्षो के हरो का योग

$= x-4+x-6 = 2x-10 \ldots\ldots\ldots\ldots.(i)$

दक्षिण पक्ष के हरो का योग

$= x-2+x-8 = 2x-10 \ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$

दोनो पक्षो के समुच्चय समान होने पर सूत्रानुसार

$2x-10=0$

$2x=10$

$x = \frac{10}{2} = 5$

सम्बन्धित प्रश्न –

1. सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा 115 का वर्ग ज्ञात करो।
2. सूत्र यावदूनम् तावदूनी द्वारा 16 का वर्ग ज्ञात करो।
3. द्वन्द्व योग से 362 का वर्ग ज्ञात करो।
4. परम मित्र अंक किसे कहते हैं।
5. सूत्र शून्य साम्य समुच्चय द्वारा समीकरण हल करो।

   (i) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{x}{4}+\frac{x}{1}$

   (ii) (x + 1) (x + 9) = (x + 3) (x + 3)

लघुत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1 : वैदिक विधि से संख्या 125316 का वर्गमूल ज्ञात करो?

	354
3	125316
3	9
65	353
5	325
704	2816
4	2816
	0

अतः125316 का वर्गमूल 354 है।

प्रश्न 2 : वैदिक विधि से संख्या 636056 का घनमूल ज्ञात करो?

हल -

	86
8^3	636056
	512
$3\times 8^2 \times 6$	1240
	1152
$3 \times 8 \times 6^2$	885
	864
6^3	216
	216
	0

अतः घनमूल = **86**

प्रश्न 3 : निखिलम विधि द्वारा भाग कीजिए

$3994 \div 97$

97 03	39 0	94 9 27
	39	211 -194
	+2	17
	41	17

भागफल = 41

शेषफल = 17

प्रश्न–4 सूत्र परावर्त्य द्वारा भाग कीजीए।

13385 ÷ 131

प्रथम खण्ड	मध्य खण्ड	तृतीय खण्ड
131	133	85
31 $\overline{3}\overline{1}$	—	
	$\overline{3}\overline{1}$	$\overline{0}$
	0	$\overline{6}\overline{2}$
	102	23

अतः भागफल 102 एवं शेषफल 23 है।

सम्बनधित प्रश्न :–

1. वैदिक विधि से 4225 का वर्गमूल ज्ञात करें।
2. वैदिक विधि से 68921 का घनमूल ज्ञात करें।
3. सूत्र निखिलम् द्वारा 14 का घनफल ज्ञात करें
4. ध्वजांक विधि द्वारा 58764 ÷ 59

ईकाई– (2) संख्या पद्धति

प्रश्नावली–2

प्रश्न का प्रकार	अंक भार
अतिलघुत्रात्तमक (1)	**1×1=1**
लघुत्रात्तमक (1)	**1×2=2**
योग	**3**

❖ यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका – $a = bq + r$ जहां $o \leq r < b$

(भाज्य =भाजक x भागफल+ शेषफल)

जहां a व b धनात्मक पूर्णांक है

तथा q व r अन्य पूर्णांक है।

इस प्रमेय का प्रयोग दो संख्याओं का HCF (म.स.) करने में किया जाता है।

❖ अंक गणित की आधारभूत प्रमेय – प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

❖ वास्तविक संख्याएं – समस्त परिमेय व अपरिमेय संख्याओं का समूह वास्तविक संख्याएं कहलाती है। उदाहरण $\frac{5}{4}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \frac{3}{7}$ .... आदि

❖ P एक अभाज्य संख्या है तथा a एक धनात्मक पूर्णांक हो यदि P, a^2 को विभाजित करता है तो P, a को भी विभाजित करेगा।

❖ कोई भी $\sqrt{P}$प्रकार की संख्या अपरिमेय संख्या होती है जहां P अभाज्य संख्या है। यथा $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$................ आदि

❖ 2 सबसे छोटी अभाज्य एवं समसंख्या है।

❖ ल.स. (LCM) व. म.स. (HCF) ज्ञात करने की सरल विधि 'अभाज्य गुणनखण्ड विधि है।

❖ यूक्लिड विभाजन विधि से दो संख्याओं को (HCF) म.स. ज्ञात किया जाता है।

❖ किन्ही भी दो संख्याओं के लिए –

प्रथम संख्या × दूसरी संख्या = ल.स. × म.स.

❖ परिमेय संख्याओं का दशमलव प्रसार – यदि किसी परिमेय संख्या के हर को $2^m \times 5^n$ के रूप में लिखा जा सके तो दशमलव प्रसार सांत होता है एवं यदि परिमेय संख्या के हर को केवल $2^m \times 5^n$ के रूप में नहीं लिखा जा सके तो दशमलव प्रसार असांत आवर्ती होता है।

महत्वपूर्ण अति लघूत्तरात्मक प्रश्न –

1. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका क्या है?
2. अंक गणित की आधारभूत प्रमेय का कथन लिखिए।
3. वास्तविक संख्याएं किसे कहते है?
4. $\frac{17}{8}$ का दशमलव प्रसार कैसा होगा लिखो (बिना लम्बी विभाजन प्रक्रिया से)

हल : $\frac{17}{8}$ यहां हर 8 का अभाज्य गुणनखण्ड

$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \ (2^3 \times 5^0)$

अतः हर 8 को हम $2^m \times 5^n$ के रूप में लिख सकते है।

जहां $m = 3$ व $n = 0 \ (2^3 \times 5^0)$

अतः का दशमलव प्रसार सांत होगा

साथ ही दशमलव प्रसार ज्ञात करने के लिए हमें हर की संख्या को 10, 100, 1000 ....या इनके गुणज के रूप में बना लेना है।

तथा $\frac{17}{8} \times \frac{125}{125} = \frac{2125}{1000} = 2.125$

अतः $\frac{17}{8}$का दशमलव प्रसार $= 2.125$ होगा

5. $\frac{13}{125}$ का दशमलव प्रसार, दशमलव के कितने अंक बाद में समाप्त होगा?

हल : $\frac{13}{125}$ का दशमलव प्रसार

$$\frac{13}{125} \times \frac{8}{8} = \frac{104}{1000} = 0.104$$

अतः $\frac{13}{125}$ का दशमलव प्रसार, दशमलव के 3 अंकों बाद में समाप्त होगा।

6. दो संख्याओं का गुणनफल 1080 है। उनका म.स. 30 है तो ल.स. क्या होगा?

हल : हम जानते है कि

ल.स. × म.स. =प्रथम संख्या × द्वितीय संख्या (दोनों संख्याओं का गुणा)

ल.स. × 30. = 1080

ल.स. $= \frac{1080}{30} = 36$

अतः ल.स.= 36

7. 12, 15, 21 का ल.स. ज्ञात करो (अभाज्य गुणनखण्ड विधि से)

हल :

2	12, 15, 21
2	6, 15, 21
3	3, 15, 21
5	1, 5, 7
7	1, 1, 7
	1, 1, 1

ल.स. = 2×2×3×5×7=420

8. 24, 15, 36 म.स. का ल.स. ज्ञात करो (अभाज्य गुणनखण्ड विधि से)

हल :

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

3	15
5	5
	1

2	36
2	18
3	9
3	3
	1

24= 2×2×2×3×1

15= 3×5×1

36= 2×2×3×3×1

इनके उभयनिष्ठ गुणनखण्ड लेकर म.स. ज्ञात करते है।

म.स. = 3×1=3

9. 196 के अभाज्य गुणनखण्डों की घातो का योगफल क्या होगा?

हलः

2	196
2	98
7	49
7	7
	1

$196= 2×2×7×7=2^2 \times 7^2$

अतः घातो का योग =2+2 =4

10. यदि $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ एक परिमेय संख्या है तो q पर क्या प्रतिबन्ध होगा जबकि $\frac{p}{q}$ एक सांत दशमलव हो।

हलः q पर प्रतिबन्ध– q के गुणन खण्ड केवल $2^m \times 5^n$ के रूप में होने चाहिये।

11. यदि a तथा 18 का LCM 36 है तथा a तथा 18 का HCF 2 है तो a का मान क्या होगा।

हलः हम जानते है कि

प्रथम संख्या x दूसरी संख्या = $LCM \times HCF$

$$a \times 18 = 36 \times 2$$

$$a = \frac{36\times2}{18}$$

$$a = 4$$

(i) सिद्ध करो कि एक विषम घनात्मक पूर्णांक संख्या का वर्ग $8q+1$के रूप का होता है।

हल : माना a कोई धनात्मक विषम पूर्णांक है तथा हम जानते है कि किसी भी धनात्मक विषम पूर्णांक को $2n+1$ के रूप में लिखा जा सकता है।

जहां $n = 1,2,3 \dots \dots$

अब प्रश्नुसार $(a) = 2n+1$

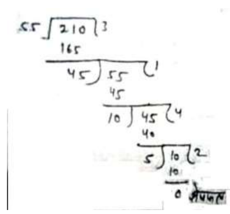
अब प्रश्नुसार $(a)^2 = (2n+1)^2$ $[n(n+1) =$ समसंख्या $= 2q]$

$$= 4n^2 + 4n + 1$$
$$a^2 = 4n(n+1) + 1$$
$$(a)^2 = 4(2q) + 1$$
$$a^2 = 8q + 1$$

अतः विषम धनात्मक पूर्णांक संख्या का वर्ग $8q+1$ के रूप का होता है।

(ii) यूक्लिड विभाजन विधि से (210, 55) का HCF ज्ञात करो

हलः सबसे पहले बड़ी संख्या में छोटी संख्या का भाग देगें और जो शेषफल आयेगा। उसे पुनः भाजक मानकर भाग क्रिया को जारी रखेगे जब तक कि शेष शून्य ना आ जाये।



शुन्य शेषफल की स्थिति में भाजक ही अभीष्ट म.स. होता है।

अत : म.स. =5

दूसरा तरीका

भाज्य =भाजक × भागफल+शेषफल

$210 = 55 \times 3 + 45$

$55 = 45 \times 1 + 10$

$45 = 10 \times 4 + 5$

$10 = 5 \times 2 + 0$

अत : म.स. =5

(iii) सिद्ध करो कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल :– माना कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

तब $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ....(1) (जहां a व b परस्पर सहअभाज्य पूर्णांक हैं और $b \neq 0$)

दोनों तरफ वर्ग करने पर

$$(\sqrt{2})^2 = (\frac{a}{b})^2$$

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$\Rightarrow$ $b^2 = \frac{a^2}{2}$ .... (2))

$\Rightarrow$ $a^2, 2$ से विभाजित है। अतः स्पष्ट है कि a, भी 2 से विभाजित होगा।

अब माना $a = 2c$ जहां c एक पूर्णांक है।

$a^2 = 4c^2$ (सभी (2) का प्रयोग से)

$\frac{b^2}{2} = c^2$ .... (3)

$\Rightarrow$ $b^2, 2$ से विभाजित हो रहा है, अतः b भी 2 से विभाजित होगा, समीकरण (2)व (3) से स्पष्ट है कि a व b का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड 2 है परन्तु यह तथ्य इस बात का विरोधाभास है कि a व b परस्पर सहअभाज्य पूर्णांक हैं इस प्रकार प्रारम्भ में हमारा मानना गलत हुआ अतः $\sqrt{2}$ अपरिमेय संख्या है।

नोटः– इसी प्रकार हम $\sqrt{3}$ व $\sqrt{5}$ की अपरिमेयता का प्रमाण दे सकते हैं।

(iv) सिद्ध करो कि $7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हलः– माना $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

$7\sqrt{5} = \frac{a}{b}, b \neq 0$ जहां a व b सहअभाज्य पूर्णांक हैं।

या $\sqrt{5} = \frac{a}{7b}$ .... (1)

चुंकि a, b पूर्णांक है। अतः $\frac{a}{7b}$ एक परिमेय संख्या है अतः समीकरण से स्पष्ट है कि $\sqrt{5}$ भी परिमेय संख्या होगी, जो कि विरोधाभाषी कथन है। क्योंकि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। इस प्रकार हमारी मानी गई परिकल्पना गलत है।

अतः $7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(v) एक संगोष्ठी में हिन्दी, अंग्रेजी, गणित में भाग लेने वाले प्रतिभागियों की संख्या क्रमशः 60, 84, 108 है। यदि प्रत्येक कमरे में बराबर संख्या में एक ही विषय के प्रतिभागी बैठाये जाते है। तो आवश्यक कमरो की न्यूनतम संख्या ज्ञात करो।

हल :– न्यूनतम कमरों की आवश्यकता है। इसलिए प्रतिभागियों की संख्या का HCF निकालेंगे।

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

$84 = 2^2 \times 3 \times 7$

$108 = 2^2 \times 3^3$

$\therefore HCF = 2^2 \times 3 = 12$

प्रत्येक कमरे में 12 प्रतिभागियों को बैठाया जा सकता है।

कमरों की संख्या $= \frac{\text{प्रतिभागियो की कुल सख्या}}{12} = \frac{60+84+108}{12}$

$= \frac{252}{12} = 21$ उत्तर

(vi) एक आयताकार बरामदा 18 मीटर 72 सेमी लम्बा तथा 13 मीटर 20 सेमी चौड़ा है। इसमें समान विमाओं वाली वर्गाकार टाइलें लगवानी है। इस प्रकार की टाइलों की न्यूनतम संख्या ज्ञात करे।

हलः– आयताकार बरामदे की लम्बाई $= 1872$ सेमी

आयताकार बरामदे की चौड़ाई $= 1320$ सेमी

चुंकि अब हमें बरामदे में वर्गाकार टाइलें लगवानी हैं टाइल की भुजा ज्ञात करने के लिये हम HCF ज्ञात करेंगे।

2	1872
2	936
2	468
2	234
3	117
3	39
13	13
	1

2	1320
2	660
2	330
3	165
5	55
11	11
	1

1872=$2\times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 13$

$= 2^4 \times 3^2 \times 13 \times 1$

$1320 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 11 \times 1$

$HCH = 2^3 \times 3 = 24$

अतः वर्गाकार टाइल की भुजा = 24 सेमी

अब टाइलों की संख्या $= \frac{\text{बरामदे का क्षेत्रफल}}{\text{टाइल का क्षेत्रफल}} = \frac{1872\times1320}{24\times24} = 4290$ टाइलें उत्तर

इकाईः–3 (बीज गणित)

प्रश्न का प्रकार	अंक भार
लघुत्रात्तमक प्रश्न (2)	3 × **2=6**
निबंधात्तमक प्रश्न (1)	**6 × 1=6**
योग	12

प्रश्नावली–3

1. बीजगणित में घनात्मक (+) ऋणातमक (–) चिह्नों से सम्बद्ध कई पदों के व्यंजक बहुपद कहलाते हैं जिनमें चर की घात प्रत्येक पद में घनात्मक पूर्णांक के रूप में होती है।

   उदाहरण (i) $5a+3$ (iv) $2x+y$
   (ii) $2a+3b+c$ (v) $3x^2+4y+5$
   (iii) x^2+2x+9

2. पदों की संख्या के अनुसार इन्हें एकपद, द्विपद, त्रिपद, आदि कहते है।
3. किसी बहुपद में पदों की संख्या उसमें उपस्थित अलग–अलग घात के चरों को अलग–अलग गणना करके ज्ञात करते हैं–

   उदाहरण $5a+3$ – द्विपद
   $2a+3b+5$ – त्रिपद
   x^2+2x+1 – त्रिपद

4. किसी बहुपद की घात ÷ बहुपद में विद्यमान चर की अधिकतम घात उस बहुपद की घात कहलाती है।

   उदाहरण $3x^2-x^2+x^4+2$ की घात = 4
   $5x^2y^3+2x^3+5$ की घात= 5 (प्रथम पद में दोनों चरों x व y की घातों का योगफल = 5)

5. किसी बीजीय व्यंजक के बहुपद होने के लिए निम्न लिखित शर्तें आवश्यक है–
   (i) चर की घात घनात्मक पूर्णांक होनी चाहिए।
   (ii) पदों की संख्या निश्चित हो।
   (iii) प्रत्येक पद में चर का गुणांक एक वास्तविक संख्या हो।
6. द्विघात बहुपद :– ऐसा बहुपद जिसमें चर की घात 2 हो–

   मानक रूप ax^2+bx+c
   जहां a, b, c सभी वास्तविक संख्याएं हैं तथा $a \neq 0$ और $x -$ चर है।

7. बहुपद के शून्यकः– एक बहुपद का मान चर के जिस मान के लिए शून्य प्राप्त होता है, उस बहुपद का शून्यक होता है।

   उदाहरणः– x^2+5x+6 का मान $x=-2,-3$ के लिये शून्य प्राप्त होता है।
   अतः –2,–3 इस बहुपद के शून्यक हैं।
   $+(x)=x^2+5x+6$
   $x=-2$ के लिए $f(-2)$
   $=(-2)^2+5(-2)+6$
   $= 4 -10+6$
   $= 0$
   $x=-3$के लिए $f(-3)=(-3)^2+5\times(-3)+6$
   $= 9-15+6$
   $= 15-15$
   $= 0$

8. किसी बहुपद के शून्यक की संख्या बहुपद की उच्चतम घात के बराबर होती है।

द्विघात बहुपद

9. मानक रूप ax^2+bx+c जहां a, b, c सभी वास्तविक संख्याऐं एवं $a \neq 0$ x –चर

   माना इस बहुपद के शून्यक $\alpha+\beta$ हैं तब
   (i) शून्यक का योग $(\alpha+\beta)=\frac{-b}{a}=\frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$
   (ii) शून्यको का गुणनफल $(\alpha\cdot\beta)=\frac{c}{a}=\frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

   उदाहरण :– द्विघात बहुपद x^2+x-2 के शून्यक ज्ञात करो एवं शून्यकों एवं गुणांकों के बीच सम्बन्ध की सत्यता की जांच करो।

   हलः– शून्यक के लिए $f(x)=0$

   $$x^2+x-2=0$$
   $$x^2+2x-x-2=0$$
   $$x(x+2)-1(x+2)=0$$
   $$(x+2)(x-1)=0$$

$$x + 2 = 0 \text{ या } x - 1 = 0$$

$$x_1 = -2 \text{ या } x_2 = 1$$

अतः शून्यक =–2, 1

शून्यकों एवं गुणांकों में सम्बन्ध

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ तथा $x_1 . x_2 = (-2) \times 1$

$x_1 + x_2 = \frac{-1}{1}$ $x_1 . x_2 = -2$

$x_1 + x_2 = -1$

प्राप्त शून्यकों का योग =–2+1= –1 तथा गुणनफल = (–2) × 1 = –2

अतः प्राप्त शून्यकों का योग एवं गुणनफल, बहुपद के गुणांकों एंव शून्यकों में सम्बन्ध के बराबर है।

10 <u>बहुपदों के लिए विभाजन एल्गोरिथः–</u>

$f(x)$ एवं $g(x)$ कोई दो बहुपद है तो हम बहुपद $q(x)$ तथा $r(x)$ ऐसे प्राप्त करते हैं कि $f(x) = q(x).g(x) + r(x)$ जहां $r(x) = 0$ या $r(x)$ की घात $< g(x)$ की घात

उदाहरण $x^3 - 3x^2 + 3x - 5$ को $x - 1 - x^2$ से भाग दीजिए और विभाजन एल्गोरिथम की सत्यता की जांच करो–

$$-x^2 + x - 1 \,)\, x^3 - 3x^2 + 3x - 5 \,(\, -x + 2$$

$$x^3 - x^2 + x$$

$$- \quad + \quad -$$

हलः–'

$$-2x^2 + 2x - 5$$

$$-2x^2 + 2x - 2$$

$$+ \quad - \quad +$$

$$-3$$

भागफल का प्रथम पद $= \frac{x^3}{-x^2} = -x$, द्वितीय पद $= \frac{-2x^2}{-x^2} = 2$

सत्यता के लिए $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$

$$q(x) = -x + 2, g(x) = -x^2 + x - 1, r(x) = -3$$

LHS= $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$

RHS= $(-x + 2)(-x^2 + x - 1) + (-3)$

= $x^3 - 3x^2 + 3x - 2 - 3$

= $x^3 - 3x^2 + 3x - 5$ =RHS

Question- $p(x) = 3x^3 + x^2 + 2x + 5$ को $g(x) = x^2 + 2x + 1$ से विभाजित करो एवं भागफल व शेषफल ज्ञात करों।

हलः– $x^2 + 2x + 1 \,)\, 3x^3 + 3x + 2x + 5 \,(\, 3x - 5$ भागफल का प्रथम पद $= \frac{3x^3}{x^2} = 3x$

$$3x^3 + 6x^2 + 3x$$

$$- \quad - \quad -$$

$$-5x^2 - x + 5$$

$$-5x^2 - 10x - 5$$

$$+ \quad + \quad +$$

$$9x + 10$$

द्वितीय पद $= \frac{-5x^2}{x^2} = -5$

भागफल $= 3x - 5$

शेषफल $= 9x + 10$

तीन या अधिक घात के बहुपद के शून्यक ज्ञात करना–

चर का एक/अधिक मान का चयन इस प्रकार करते हैं जिसके लिए बहुपद का मान शून्य होता है। उससे एक गुणनखण्ड ज्ञात कर उससे बहुपद को विभाजित कर बहुपद को दो घात के बहुपद में बदल लेते हैं। अब द्विघात बहुपद का गुणनखण्ड या किसी अन्य विधि से शून्यक ज्ञात करते हैं।

उदाहरण :– $f(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ के शून्यक ज्ञात करो।

$x = -2$ के लिए $f(-2) = (-2)^3 + 13(-2)^2 + 32(-2) + 20$

= -8 +52 -64 +20

= -72+72

= 0

अतः $(x + 2), f(x)$ का मान एक गुणनखण्ड है तथा एक शून्यक $x = -2$ अन्य दो शून्यकों के लिए $f(x)$ को $x - 2$ से विभाजित करते है।

$x + 2\ )x^3 + 13x^2 + 32x + 20(x^2 + 11x + 10$

$x^3 + 2x^2$

$-\quad -$

$11x^2 + 32x + 20$

$11x^2 + 22x$

$-\quad -$

$10x + 20$

$10x + 20$

$-\quad -$

0

भागफल $= x^2 + 11x + 10$

*गुणन*खण्ड करके अन्य दो शून्यक ज्ञात करेंगे।

$x^2 + 11x + 10 = 0$

$x^2 + 10x + x + 10 = 0$

$x(x + 10) + 1(x + 10) = 0$

$(x + 10)(x + 1) = 0$

$x = -10, x = -1$

द्विघात समीकरण

मानक(व्यापक) रूप $ax^2 + bx + c = 0$ जहां a, b, c वास्तविक संख्याएं हैं एवं $a \neq 0$

द्विघात समीकरण के मूल – यदि संख्याऐं α व β द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c + 0$ को सन्तुष्ट करते हैं तो α व β इस द्विघात समीकरण के मूल कहलाते हैं।

मूल ज्ञात करने की विधियां

1 गुणनखण्ड विधि (अ) इस विधि में समीकरण को इस प्रकार व्यवस्थित करते हैं कि RHS में केवल शून्य हो

(ब) अब LHS के गुणनखण्ड करते हैं।

(स) प्रत्येक गुणनखण्ड को अलग–अलग शून्य के बराबर कर दोनों मूल निकाल लेते हैं।

उदाहरण $2x^2 + 7x - 15 = 0$ के मूल ज्ञात करो–

हल $2x^2 + 10x - 3x - 15 = 0$

$2x(x + 5) - 3(x + 5) = 0$

$(2x - 3)(x + 5) = 0$

$2x - 3 = 0$ या $x + 5 = 0$

$x = \frac{3}{2}$ व $x = -5$

अतः समीकरण के मूल $= \frac{3}{2}, -5$

2 द्विघात समीकरण को पूर्ण वर्ग विधि द्वारा हल करना

(अ) दी गई समीकरण में x^2 का गुणांक एक बनाने के लिए समीकरण को x^2 के गुणांक से भाग देते हैं।

(ब) अचर पद को RHS मे पक्षान्तर करते हैं।

(स) अब दोनों पक्षों में x के गुणांक के आधे का वर्ग करके जोड़ते हैं।

(द) इस प्रकार दी गई समीकरण $(x \pm \alpha)^2 = b^2$ में बदल जाती है

(य) अन्त में दोनों पक्षों का वर्गमूल लेकर x के मान ज्ञात करते हैं जो द्विघात समीकरण का अभिष्ठ हल है।

उदाहरणः– पूर्ण विधि से समीकरण $5x^2 - 6x - 2 = 0$ का हल ज्ञात करें।

$5x^2 - 6x - 2 = 0$

$x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{2}{5} = 0$ (x^2 के गुणांक 5 का भाग देने पर)

$x^2 - \frac{6}{5}x = \frac{2}{5}$ (अचर पद का पक्षान्तर करने पर)

x का गुणांक $(\frac{-6}{5})$ का आधा $= \frac{-3}{5}$ का वर्ग दोनों पक्षों में जोडने पर

$x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{25} = \frac{2}{5} + \frac{9}{25}$

$(x - \frac{3}{5})^2 = \frac{19}{25}$

वर्गमूल लेने पर $x - \frac{3}{5} = \pm \frac{\sqrt{19}}{5} \quad \rightarrow \quad x = \pm \frac{\sqrt{19}}{5} + \frac{3}{5}$

अब RHS में + ive चिह्न लेने पर

$x = \frac{\sqrt{19}}{5} + \frac{3}{5} = \frac{3+\sqrt{19}}{5}$

तथा –ive चिह्न लेने पर

$x = \frac{-\sqrt{19}}{5} + \frac{3}{5} = \frac{3-\sqrt{19}}{5}$ अतः द्विघात समीकरण का हल $\frac{3+\sqrt{19}}{5}, \frac{3-\sqrt{19}}{5}$

श्रीधराचार्य सूत्र विधि से द्विघात समीकरण का हल करना–

द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$

श्रीधराचार्य सूत्र $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

यहां x के दो मान + एंव – चिह्न लेने पर प्राप्त करते हे।

द्विघात समीकरण के मूलों की प्रकृति

- सर्वप्रथम दी गई द्विघात समीकरण की $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करके a, b, c का मान ज्ञा करते हैं।
- अब विवेचक / विविक्तिकर $D = b^2 - 4ac$ ज्ञात करते हैं
- यदि $D > 0$ तो मूल वास्तिविक और असमान होंगे।
- $D = 0$ तो मूल वास्तविक और समान होंगे।
- $D < 0$ तो मूल काल्पनिक व असमान होंगे।

उदाहरण..– द्विघात समीकरण $2x^2 - 4x + 3 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात करो–

हलः– यहां $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर $a = 2, b = -4, c = 3$

अतः $D = b^2 - 4ac$

$= (-4)^2 - 4 \times 2 \times 3$

$= 16 - 24$

$D = -8 < 0$ अतः समीकरण के मूल काल्पनिक होंगे।

उदाहरण– द्विघात समीकरण $2x^2 + x - 1 = 0$ के मूल श्रीधराचार्य सूत्र से ज्ञात करो–

हल (स्वयं करें)

परीक्षा उपयोगी प्रश्नः–

1 यदि बहुपद $x^3 - 3x^2 + x + 2$ को एक बहुपदीय फलन $g(x)$ से भाग देने पर भागफल तथा शेषफल क्रमशः $(x - 2)$ व $(-2x + 4)$ हैं तो $g(x)$ ज्ञात कीजिए।

2 एक आयताकार खेत का विकर्ण उसकी छोटी भुजा से 25 मीटर अधिक हैं। यदि बड़ी भुजा छोटी भुजा से 23 मीटर अधिक है तो खेत की भुजाऐं ज्ञात कीजिए।

3 पूर्ण वर्ग विधि से द्विघात समीकरण $4x^2 + 4bx - (a^2 - b^2) = 0$ के मूल ज्ञात करो।

4 $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ के सभी शून्यक ज्ञात करो, यदि इसके दो शून्यक $\sqrt{2}$ और $-\sqrt{2}$ हैं।

5 बहुपद $x^3 - 7x + 6$ के अन्य सभी शून्यक ज्ञात करो यदि इसका एक शून्यक 1 है।

6 दो संख्याओ के वर्गों का अन्तर 45 है तथा छोटी संख्या का वर्ग बड़ी संख्या का 4 गुणा है, संख्याऐं ज्ञात करो।

प्रश्नावली–4

दो चरों वाले रैखिक समीकरण एवं असमिकाएं।

रैखिक समीकरण एक ऐसा समीकरण जिसमें चर की अधिकतम घात एक होती है, इन्हें रैखिक समीकरण कहते हैं।

जब चरों की संख्या दो हो एवं दोनों की घात एक– एक हो उसे दो चरों वाला रैखिक समीकरण कहते हैं।

दो चरो वाले रैखिक समीकरण कार्तीय निर्देशांक पद्धति में एक सरल रेखा को निरूपित करते हैं। अर्थात दो चरो वाले रैखिक समीकरण को यदि हम ग्राफ पर निरूपित करते हैं तो हमें एक सरल रेखा प्राप्त होती है।

उदाहरण– $ax + by + c = 0$ जहां a, b, c वास्तविक संख्याऐं एंव $a, b \neq 0$ एवं x, y चर संख्याऐं है।

रैखिक समीकरण युग्म

मानक रूप $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$

$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$

यहां $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ सभी वास्तविक संख्याऐं हैं। तथा x व y चर संख्याऐं हैं जिनके गुणांक a_1, b_1 व a_2, b_2 का मान शून्य नहीं है।

रैखिक समीकरण युग्म के गुणांकों मे सम्बन्ध के आधार पर हल की प्रकृति

समीकरण युग्म $a_1 x + b_1, y + c_1 = 0$

$a_2 x + b_2, y + c_2 = 0$

गुणांकों की तुलना (i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ इस स्थिति में समीकरण निकाय का हल अद्वितीय होगा एंव आलेखी निरूपण में दो प्रतिच्छेदी रेखाऐं प्राप्त होंगी तथा समीकरण निकाय संगत होगा।

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ इस स्थिति मे समीकरण निकाय के अनन्त हल होंगे एवं आलेखी निरूपण में संपाती रेखाऐं प्राप्त होंगी तथा समीकरण निकाय संगत होगा।

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ इस स्थिति मे समीकरण निकाय का कोई हल नहीं होगा एंव आलेखी निरूपण मे दो समान्तर रेखाऐं प्राप्त होंगी तथा समीकरण निकाय असंगत होगा।

प्रश्नः– गुणांकों की तुलना करके निम्न रैखिक समीकरण युग्मों के संगत/असंगत की पहचान करो–

(i) $x + y = 3$ **(ii)** $2x - 3y = 8$ **(iii)** $3x - y = 2$

$\mathbf{3x - 2y = 4}$ $\mathbf{4x - 6y = 9}$ $\mathbf{6x - 2y = 4}$

(i) $x + y = 3 \rightarrow x + y - 3 = 0$

$3x - 2y = 4 \rightarrow 3x - 2y - 4 = 0$

यहां $a_1 = 1, b_1 = 1, c_1 = -3$

तथा $a_2 = 3, b_2 = -2, c_2 = -4$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-2}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

अतः $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ समीकरण युग्म का अद्वितीय हल विद्यमान है तथा समीकरण निकाय संगत है। यहां दोनों समीकरणों से प्राप्त रेखाएं प्रतिच्छेदी हैं।

(ii) $2x - 3y = 8 \rightarrow 2x - 3y - 8 = 0$

$4x - 6y = 9 \rightarrow 4x - 6y - 9 = 0$

$a_1 = 2, b_1 = -3, c_1 = -8 \quad a_2 = 4, b_2 = -6, c_2 = -9$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{-8}{-9} = \frac{8}{9}$

यहां $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \pm \frac{c_1}{c_2}$ समीकरण युग्म का कोई हल विद्यमान नहीं है तथा समीकरण निकाय असंगत है। यहां दोनों समीकरणों से प्राप्त रेखाऐं समान्तर है।

(iii) $3x - y = 2 \rightarrow 3x - y - 2 = 0$

$6x - 2y = 4 \rightarrow 6x - 2y - 4 = 0$

यहां $a_1 = 3, b_1 = -1, c_1 = -2 \quad a_2 = 6, b_2 = -2, c_2 = -4$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

अतः $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{2}$

समीकरण युग्म में अनन्त हल विद्यामान हैं तथा समीकरण निकाय संगत है। यहां दोनों समीकरणों से प्राप्त रेखाऐं संपाती है।

दो चरों में रैखिक समीकरण को हल करने की विधि

- आलेखीय /ग्राफ विधि
- बीज गणितीय विधि
  - प्रतिस्थापन विधि
  - विलोपन विधि
  - वज्रगुणन विधि

प्रश्नः– निम्न रैखिक समीकरण युग्म को आलेखीय विधि द्वारा हल कीजिए–

$2x + y = 6, \; 2x - y = 2$

हलः दिया गया समीरकण युग्म

$2x + y = 6 - - - (1)$

$2x - y = 2 - - - (2)$

सर्वप्रथम समीकरण 1 को किसी चर x या y के बराबर करते हैं

$y = 6 - 2x$

यहां पर y परतंत्र चर, $x -$ स्वतंत्र चर

$x = 0$ रखने पर $y = 6 - 2 \times 0$

$= 6 - 0$

$= 6$

$x = 1$ रखने पर $y = 6 - 2 \times 1$

$= 6 - 2$

$= 4$

$x = 2$ रखने पर $y = 6 - 2 \times 2$

समीकरण 1 से प्राप्त सारणी

x	0	1	2	3
y	6	4	2	0

$= 6 - 4$

$= 2$

$x = 3$ रखने पर $y = 6 - 2 \times 3$

$= 6 - 6$

$= 0$

पुनः समीकरण 2 से $x = \frac{2+y}{2}$ यहां x परतंत्र चर, y स्वतंत्र चर

$y = 0$ रखने पर $x = \frac{2+0}{2} = \frac{2}{2} = 1$

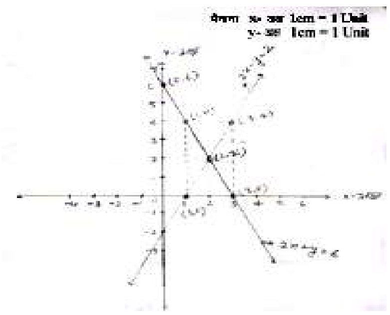
$y = 2$ रखने पर $x = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$y = 4$ रखने पर $x = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$y = -2$ रखने पर $x = \frac{2-2}{2} = \frac{0}{2} = 0$

समीकरण 2 से प्राप्त सारणी

x	1	2	3	0
y	0	2	4	−2



यहां आलेख में दोनों रेखाएं बिन्दु $(2, 2)$ पर प्रतिच्छेद करती हैं। अतः समीकरण युग्म का हल $x = 2, y = 2$ है।

ग्राफीय विधि से हल करत समय निम्नलिखित बिन्दु ध्यान में रखना चाहिए।

(अ) समीकरण में एक चर को दूसरे चर के पदों में लिखते समय यह ध्यान रखना चाहिए कि किस चर को आसानी से दूसरे चर के रूप में व्यक्त किया जा सके।

(ब) समीकरणों से सारणी बनाते समय सारणी में पूर्णांक मान ही आये ताकि उन्हें ग्राफ पर निरूपित करते समय गलती की सम्भावना कम हो।

(स) पैमाना हमेशा अपनी सुविधानुसार एवे दोनों अक्षों पर अलग–अलग भी लिया जा सकता है।

(द) यदि दोनों रेखाएं प्रतिच्छेदी हो तो कम से कम एक मान दोनों सारणियों मे उभयनिष्ठ लिखने का प्रयत्न करें क्योंकि यही उभयनिष्ठ बिन्दु अभिष्ठ हल होता है।

रैखिक असमिकाएं

एक रैखिक असमिका एक समीकरण की तरह ही होता है जिसमें बराबर चिह्न के स्थान पर $<$ (से कम) या $>$ (से अधिक) चिह्न का प्रयोग होता है।

मानक रूप $ax + by < c$ or $ax + by \leq c$

या $ax + by > c$ or $ax + by \geq c$

ज्हां a, b, c वास्तविक संख्याऐं x, y चर हैं।

रैखिक समिकाओं के सामान्य गुणधर्म

(अ) रैखिक असकमका के दोनो पक्षों में समान संख्या जोड़ने या घटाने पर रैखिक असमिका का चिह्न अपरिवर्तित रहता है।

उदाहरण $x + y \geq \rightarrow x + y + 5 \geq 10 + 5$

$\rightarrow x + y + 5 \geq 15$

(ब) रैखिक असमिका के दानों पक्षो को घनात्मक संख्या से गुणा करने अथवा भाग देने पर चिह्न अपरिवर्तित रहता है।

(स) रैखिक असमिका के दोनों पक्षों को ऋणात्मक संख्या से गुणा करने अथवा भाग देने पर असमिका का चिह्न परिवर्तित हो जाता है।

(द) रैखिक असमिका में पदों के पक्षान्तरण पर भी चिह्न अपरिवर्तित रहता है।

रैखिक असमिका को हल करने की आलेखीय विधि

(अ) रैखिक असमिका को समीकरण रूप में लिखते हैं, जो एक सरल रेखा को व्यक्त करेगी।

(ब) अब समीकरण में किसी चर के दो या दो से अधिक सुविधाजनक मान रखकर उसके किसी चर के संगत अन्य चर के मान ज्ञात कर सारणी बना लेते है।

(स) ग्राफ पेपर पर उचित पैमाना लेकर उन बिन्दुओंको रखते/चिह्नित करते हुए सरल रेखा प्राप्त करते हैं।

(द) सरल रेखा ग्राफ पेपर को दो भागों में विभक्त करती है।

(य) अब असमिका में $x = 0$ व $y = 0$ रखते हैं, यदि असमिका को यह x, y का मान सन्तुष्ट करता है, तब मूल बिन्दु की ओर का भाग असमिका का हल क्षेत्र होगा। यदि यह बिन्दु असमिका को सन्तुष्ट नहीं करता तब मूल बिन्दु के विपरित ओर का भाग हल क्षेत्र होगा।

उदाहरण असमिका $x \geq 2$ का आलेखीय विधि से हल ज्ञात करो–

हल– समीकरण रूप में $x + 0y = 2$

अब $y = 1$ रखने पर $x = 2$

$y = 2$ रखने पर $x = 2$

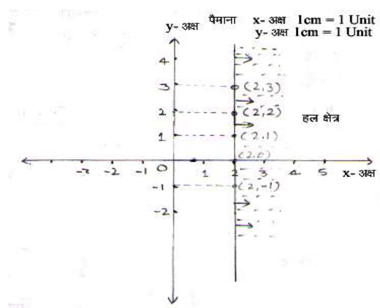
$y = 3$ रखने पर $x = 2$

$y = 0$ रखने पर $x = 2$

$y = -1$ रखने पर $x = 2$

प्राप्त सारणी

x	2	2	2	2	2
y	−1	0	1	2	3



हल क्षेत्र के लिएः– मूल बिन्दु $(0, 0)$
असमिका $x \geq 2$ में रखने पर $0 \geq 2$

जो असत्य है। अतः हल क्षेत्र मूल बिन्दु के विपरित ओर का भाग है।

उदाहरण– असमिका $|x| \leq 3$ का आलेखीय विधि से हल ज्ञात करो–

हल– दी गई असमिका $|x| \leq 3$ का मोड्यूलस हटाने पर निम्न दो असमिकाओं के रूप में लिख सकते है।

$x \leq 3$, $x \geq -3$

अब $x + 0y = 3$ (समीकरण रूप में)

$y = 0$ से $x = 3$

$y = -1$ से $x = 3$

$y = 2$ से $x = 3$

$y = 3$ से $x = 3$

पुनः अब $x + oy = -3$ (समीकरण रूप में)

$y = 0$ से $x = -3$

$y = -1$ से $x = -3$

$y = 1$ से $x = -3$

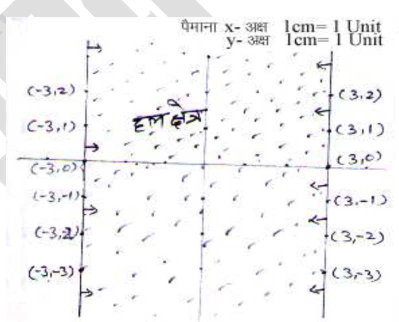
$y = 2$ से $x = -3$ एवं $y = 3$ से $x = -3$

$x \leq 3$ से प्राप्त सारणी

x	3	3	3	3	3
y	−1	0	1	2	3

$x \geq -3$ से प्राप्त सारणी

x	−3	−3	−3	−3	−3
y	−1	0	1	2	3



हल क्षेत्र के लिए
मूल बिन्दु $(0, 0)$ असमिकाओं $x \leq 3$ व $x \geq -3$ में रखने पर।
(अ) $x \geq -3$ में रखने पर $0 \geq -3$ जो सत्य ह।
(ब) $x \leq 3$ में रखने पर $o \leq 3$ जो सत्य है।
अतः हल क्षेत्र दोनों रेखाओं के मध्य का भाग या दोनों मे मूल बिन्दु की ओर का भाग है।

उदाहरण :– असमिका $2x - 3y \leq -8$ का आलेखीय विधि से हल क्षेत्र ज्ञात करो–

हल समीकरण रूप में $2x - 3y = -8$

$$x = \frac{-8+3y}{2}$$

$$y = 0 \text{ रखने पर } x = \frac{-8+3(0)}{2}$$

$$= -4$$

$y = 2$ रखने पर $x = \frac{-8+3(2)}{2}$

$= -1$

$y = 4$ रखने पर $x = \frac{-8+3(4)}{2}$

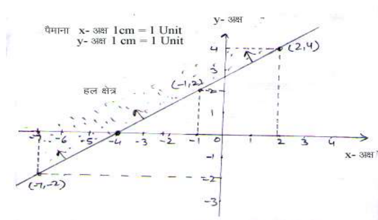
$= -2$

$y = -2$ रखने पर $x = \frac{-8+3(-2)}{2}$

$= -7$

प्राप्त सारणी

x	–4	–1	2	–7
y	0	2	4	–2



हल क्षेत्र के लिए :– मूल बिन्दू $0, 0$ का मान असमिका $2x - 3y \leq -8$ में रखने पर $0 - 0 \leq -8$ or $0 \leq -8$ जो कि असत्य है अतः असमिका का हल क्षेत्र मूल बिन्दु के विपरित की ओर का भाग है।

परीक्षा उपयोगी प्रश्नः–

1 निम्न रैखिक समीकरण युग्म को आलेखीय विधि से हल ज्ञात करो तथा उन बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात करो जहां इनके द्वारा निरूपित रेखाऐं $\boldsymbol{y}$ अक्ष को काटती है।

$\boldsymbol{3x + 2y = 12}$

$\boldsymbol{5x - 2y = 4}$

2 निम्न रैखिक समीकरण युग्म को आलेखीय विधि से हल ज्ञात करो–

$\boldsymbol{2x + 3y = 13}$

$\boldsymbol{5x - 2y = 4}$

3 निम्न रैखिक समीकरण युग्म संगत/असंगत हैं। यदि संगत है तो ग्राफीय विधि से हल ज्ञात करा–

$\boldsymbol{2x + y - 6 = 0}$

$\boldsymbol{4x - 2y - 4 = 0}$

4 असमिका $\boldsymbol{|y - x| \leq 3}$ का आलेखन विधि से हल क्षेत्र ज्ञात करो।

(संकेत मोड्यूलस हटाने पर $\boldsymbol{y - x \leq 3}$ एवं $\boldsymbol{y - x \geq -3}$ दो असमिकाऐं बनती है।)

5 रैखिक समीकरण युग्म को आलेखीय विधि से हल करो एवं इसकी सहायता से $\boldsymbol{a}$ का मान ज्ञात करो जबकि

$\boldsymbol{4x + 3y = a}$,

$$\boldsymbol{x + 3y = 6}$$
$$\boldsymbol{2x - 3y = 12}$$

6 $\boldsymbol{k}$ के किस मान के लिए रैखिक समीकरण युग्म का कोई हल नहीं होगा–

$\boldsymbol{3x + y = 1}$

$\boldsymbol{(2k - 1)x + (k - 1)y = 2k + 1}$

7 5 कुर्सियों तथा 4 टेबलों का मूल्य 750 रूपये हो तो इस समस्या को बीजगणित रूप में लिखिए।

उत्तर $\boldsymbol{5x + 4y = 750}$

8 एक नगर में टैक्सी का किराया पहले किमी का 8 रूपये उसके बाद के लिए 5 रूपये हैं। यदि तय दूरी $\boldsymbol{x}$ किमी तथा किराया $\boldsymbol{y}$ रूपये है तो इसका समीकरण बनाओ।

उत्तर $\boldsymbol{y = 5x + 3}$

प्रश्नावली–5

समान्तर श्रेढी (A.P.)

अनुक्रम– किसी संख्या समूह को लिखने के लिये एक नियम का पालन किया गया हो, उसे अनुक्रम कहते हैं।

समान्तर श्रेढ़ी – संख्याओं का एक ऐसा अनुक्रम जिसमें अगला पद एक निश्चित संख्या जोड़ने या घटाने पर प्राप्त होता है, समान्तर श्रेढ़ी कहलाता है।

सार्व अन्तर– जो निश्चित संख्या अनुक्रम में अगला पद प्राप्त करते हेतु जोड़ी या घटाई जाती है अर्थात क्रमागत पदों का अन्तर सार्वअन्तर कहलाता है।

किसी समाान्तर श्रेढ़ी का सार्व अन्तर धनात्मक या ऋणात्मक होता है।
समान्तर श्रेढ़ी का व्यापक रूप–
$a, a+d, a+2d, \ldots\ldots\ldots\ldots$ (जहां a प्रथम पद तथा d सार्वअन्तर)
सार्व अन्तर ज्ञात करना–
$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$
= श्रेढ़ी का द्वितीय पद– श्रेढ़ी का प्रथम पद
या d = श्रेढ़ी का तृतीय पद–श्रेढ़ी का द्वितीय पद इसी क्रम में $d = a_n - a_{n-1}$
$= n$ वां पद $-(n-1)$ वां पद
समान्तर श्रेढ़ी में पदों का चयन–
(i) जब पदों का चयन विषम संख्या मे हो
उदाहरणः– 3 पद $\rightarrow a-d, a, a+d$
5 पद $\rightarrow a-2d, a-d, a+d, a+2d$
यहां सार्वअन्तर हमेशा d रखा जाता है–
(ii) जब पदों का चयन सम संख्या में हो–
4 पद $\rightarrow a-3d, a-d, a+d, a+3d$
2 पद $\rightarrow a-d, a+d$
6 पद $\rightarrow a-5d, a-3d, a-d, a+3d, a+5d$
यहां सार्वअन्तर हमेशा $2d$ रखा जाता है।

समान्तर श्रेढ़ी का n वां पद ज्ञात करना– (व्यापक पद)
$T_n = a + (n-1)d$
यहां $T_n -$ व्यापक पद , $d -$ सार्वअन्तर, $a -$ प्रथम पद, $n -$ पदों की संख्या
उदाहरण समान्तर श्रेढ़ी 2, 7, 12, ... का 11वां पद ज्ञात करो–
हल यहां $a = 2, d = 7-2 = 5, = 12-7 = 5$, $n = 11$
n वां पद/व्यापक पद $T_n = a + (n-1)d$
a, n, d का मान रखने पर
$T_{11} = 2 + (11-1)5$
$= 2 + 10 \times 5$
$= 2 + 50$
$= 52$
अतः 11वां पद = 52

उदाहरणः– सुरेश ने 1985 में 5000रू के मासिक वेतन पर कार्य प्रारम्भ किया और प्रत्येक वर्ष रू. 200 की वेतन वृद्धि प्राप्त करता हैं। किस वर्ष उसका वेतन रू. 7000/– हो गया?
हलः– प्रत्येक वर्ष रू. 200/– की वेतन वृद्धि यह दर्शाती है कि एक समान प्रति वर्ष वृद्धि है।
अतः सुरेश की वेतन श्रृंखला समान्तर श्रेढ़ी हैं।
1985 में मासिक वेतन रू. 5000 है अतः सार्वअन्तर $d = 200$ वेतन वृद्धि रू. 200 प्रतिवर्ष समान है। अतः सार्वअन्तर $d = 200$
माना n वर्षों में सूरेश का वेतन 7000 हो जाता है। $T_n = 7000$
$T_n = 7000$
सूत्र से $a + (n-1)200 = 7000$ $\{T_n = a + (n-1)d\}$
$5000 + (n-1)200 = 7000$ (a व d के मान रखने पर)
$(n-1)200 = 7000 - 5000$
$(n-1)200 = 2000$
$(n-1) = \frac{2000}{200} = 10$
$n = 10 + 1$
$n = 11$
अर्थात 11 वें वर्ष में या 1995 में सुरेश का वेतन रू. 7000 है।
समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योगफल–
$s_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$
यहां $s_n -$ n पदों का योगफल, $n -$ पदों की संख्या, $a -$ प्रथम पद, $d -$ सार्वअन्तर

उदाहरणः– 1 से 100 तक के मध्य की 6 से विभाजित संख्याओं का योगफल ज्ञात करो–

हलः– यहां सर्वप्रथम 1 से 100 तकी की संख्याओं मे 6 से विभाजित संख्याओं की संख्या ज्ञात करेंगे जिसके लिए $T_n = a + (n-1)d$ का प्रयोग करेंगे।

यहां $a = 6$ (प्रथम पद जो 6 से विभाजित है)

$d = 6$ (6 से विभाज्य है अतः सार्वअन्तर=6 है।)

$T_n = 96$ (1से 100 तक अंतिम संख्या जो 6 से भाज्य हो)

अतः $T_n = a + (n-1)d$

$96 = 6 + (n-1)6$

$96 - 6 = (n-1)6$

$\frac{90}{6} = (n-1)$

$15 = n - 1$

$n - 1 = 15$

$n = 15 + 1 = 16$

अब n पदों का योगफल

$s_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$n = 6, a = 6, d = 6$

$s_{16} = \frac{16}{2}\{2 \times 6 + (16-1) \times 6\}$

$= 8[12 + 15 \times 6]$

$= 8 \times [12 + 90]$

$= 8 \times 102 = 816$

उदाहरण 2 अंकों की कितनी संख्याएं 3 से विभाज्य हैं

हल– 2 अंकेां की 3 से विभाज्य संख्याएं 12, 15, 18, . . . 99

जो एक समान्तर श्रेढ़ी है।

अतः $a = 12, d = 3, n = ?$ (ज्ञात करना है), $T_n = 99$

$T_n = a + (n-1)d$

$99 = 12 + (n-3).3$

$99 - 12 = (n-1).3$

$\frac{87}{3} = (n-1)$

$29 = n - 1$

$n - 1 = 29$

$n = 29 + 1$

$n = 30$ अतः 3 से विभाज्य 2 अंकों की संख्याएं 30 हैं।

किसी समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योगफल दिया हुआ है तो श्रेढी का n वां पद ज्ञात करने का सूत्र

$a_n = s_n - s_{n-1}$

उदाहरण– किसी समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योगफल $4n - n^2$ है तो इसका 10 वां पद ज्ञात करो–

हल यहां $s_n = 4n - n^2$

प्रथम Method $n = 1$ रखने पर

$s_1 = 4 \times 1 - 1^2$

$= 4 - 1$

$= 3$ अर्थात $a = 3$ (एक पद का योग प्रथम पद के बराबर होता है।)

$n = 2$ रखाने पर

$s_n = 4 \times 2 - 2^2$

$= 8 - 4$

$= 4$

$s_2 = a_1 + a_2$

$4 = 3 + a_2$

$a_2 = 4 - 3 = 1$

सार्वअन्तर $d = a_2 - a_1, = 1 - 3 = -2$

10 वां पद

$a_{10} = a + 9d$

$= 3 + 9 \times (-2)$

$= 3 - 18$

$= -15$ अतः 10 वाँ पद $a_{10} = -15$

श्रेष्ठागी मिशन – 100

प्र.(1) एक मोटर कार **A** स्थान से **B** स्थान तक 175 किमी दूरी 70 किमी/घण्टा की समान गति से सभी 10 हरे यातायात सिग्नलों का पार करती है। किसी दिन भारी यातायात के कारण यह कार प्रथम सिग्नल पर एक मिनटए दूसरे सिग्नल पर 3 मिनट, तीसरे सिग्नल पर 5 मिनट एवम् इसी प्रकार दसवें सिग्नल पर 19 मिनअ रूकती है। स्थान**B** तक पहुंचने मे इस दिन कुल कितना समय लगेगा।

हल :– यदि मोटर कार सिग्नलों पर रूकती नहीं है तब A से B तक पहुंचने मे लगा समय (दूरी/चाल) $\frac{175}{70} = 2.5$घण्टे अर्थात 150 मिनट।

प्रश्नानुसार जब सिग्नलों पर रूकती है तब रूकने का समय है= 1, 3, 5, ... 19 जो (A.P.) है।

अतः A.P. का योग $s_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}(a + l)$

यहां $n = 10, a = 1, l = 19$ (अंतिम पद)

$s_{10} = \frac{10}{2}(1 + 19)$

$= 5 \times 20$

$= 100$ मिनट (अतः कार को A से B तक पहुंचने मे लगा समय $= 150 + 100 = 250$ मिनट)अर्थात 4 घण्टे 10 मिनट

प्र.(2)किसी A.P. का दूसरा व तीसरा पद क्रमशः 3 और 5 हो तो इसके प्रथम 20 पदों का योगफल ज्ञात करों–

हलः– A.P. का दूसरा पद $(a_2) = 3$ तीसरा पद $(a_3) = 5$

$a_n = a + (n-1)d$

$a_2 = a + d = 3$ .... (1)

$a_3 = a + 2d = 5$ .... (2) समीकरण 1 व 2 से a का विलोपन

$a + \quad d = 3$

$a + 2d = 5$

$\underline{- \quad - \qquad -}$

$\underline{-d = -2}$

$d = 2$ समीकरण 1 में रखने पर $a + 2 = 3$

$a = 3 - 2$

$a = 1$

n पदों का योगफल $s_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ यहां $n = 20, a = 1, d = 2$

$s_{20} = \frac{20}{2}[2 \times 1 + (20-1)2]$

$= 10(2 + 38)$

$= 10 \times 40$

$s_{20} = 400$ अतः 20 पदों का योग 400 है।

परीक्षा उपयोगी प्रश्न–

1 एक समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम व अंतिम पद क्रमशः 1 व 11 है। इसके पदों का योगफल 36 है तो पदों की संख्या ज्ञात करो।

2 उस **A.P.** के 15 पदों का योगफल ज्ञात करो जिसका पांचवाँ पद व नवाँ पद क्रमशः 26 और 42 हैं।

3 **A** व **B** के मध्य की दूरी 150 किमी है। इसके मध्य 10 यातायात सिग्नल हैं। यदि एक कार 60 किमी/घण्टा की समान गति से सभी हरे सिग्नलों को पार करते हुए 2 घण्टे 30 मिनट में स्थान **B** पर पहुंचती है। लेकिन अन्य दिन भारी यातायात के कारण कार को निम्नानुसार रूकना पड़ता है।

प्रथम सिग्नल पर 1 मिनट

द्वितीय सिग्नल पर 2 मिनट

इसी प्रकार 10 वें सिग्नल पर 10 मिनट

ज्ञात करो कि कार अन्य दिन सभी सिग्नलों पर रूकते हुए यदि **B** पर पहुंचती है तो कार द्वारा लिया गया कुल समय कितना होगा।

4 समान्तर श्रेढ़ी 3, 5, 7, 9, ... 201 का अन्त से 5 वां पद ज्ञात करो।

5 उस **A.P.** के प्रथम 20 पदों का योग ज्ञात करो जिसका$\boldsymbol{n}$वां पद $\boldsymbol{a_n = 3 + 4n}$ है।

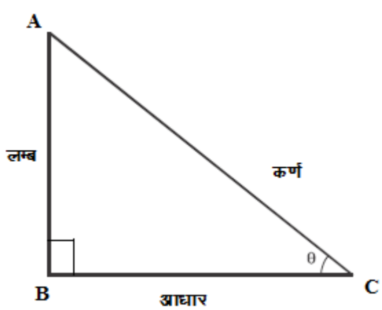
6 1 से 100 के मध्य 7 से विभाजित होने वाली संख्याओं का योगफल ज्ञात करो।

इकाई–4 (त्रिकोणमिति)

प्रश्न का प्रकार	अंक भार
अतिलघुत्रात्तमक (2)	**2×1=2**
लघुत्रात्तमक (1)	**1×3=3**
निबंधात्तमक (1)	**1×6=6**
योग	**11**

प्रश्नावली– 6

*त्रिकोणमिति में त्रिभुज की भुजाओं और कोणों के बीच के सम्बन्धों का अध्ययन किया जाता है।
*किसी समकोण त्रिभुज की भुजाओं से सम्बन्ध अनुपात को त्रिकोणमितीय अनुपात कहते हैं। इन्हें $\frac{LAL}{KKA}$ से याद कर सकते हैं।



*त्रिकोणमितीय अनुपात 6 होतेहैं।

(i) $\sin\theta = \frac{L}{K} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$

(ii) $\cos\theta = \frac{A}{K} = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$

(iii) $\tan\theta = \frac{L}{A} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$

(iv) $\cot\theta = \frac{A}{L} = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$

(v) $\sec\theta = \frac{K}{A} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$

(vi) $\mathrm{cosec}\,\theta = \frac{K}{L} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$

नोटः– θ कोण के सामने की भुजा को लम्ब लिया जाता ळें

*कुछ विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात :–

कोण (डिग्री / रेडियन) → त्रिकोणमितीय अनुपात	0° 0	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot\theta$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
$\mathrm{cosec}\,\sigma$	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

महत्वपूर्ण अतिलघूतरात्मक प्रश्न :–

1. $sin^2 30^0 + 2cos^2 45^0 + 3tan^2 60^0$ का मान ज्ञात करो।
2. निम्न में x का मान ज्ञात करो।

$$cos\ x = cos\ 60^0 cos\ 30^0 + sin\ 60^0 sin 30^0$$

3. $2\ sin^2 60^0 cos\ 60^0$ का मान होगा।
4. यदि $\text{cosec}\ \theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ हो तो θ का मान है।
5. $4(sin^4 30^0 + cos 60^0) - 3(cos^2 45^0 - sin^2 90^0)$ का मान होगा।
6. यदि $cosec\ A = \frac{17}{8}$ हो तो $tan\ A$ का मान क्या होगा।

हलः– 1. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3\left(\sqrt{3}\right)^2$

$= \frac{1}{4} + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3(3)$

$= \frac{1}{4} + 1 + 9$

$= \frac{1}{4} + 10$

$= \frac{41}{4}$ ans.

हलः– 2. $cos\ x = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4}$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos x = \cos 30^0$

$x = 30^\circ$ ans.

हलः– 3. $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)$

$= 2\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{3}{4}$ ans.

हलः– 4. $cosec\ \theta = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$cosec\ \theta = cosec\ 60^0$

$\theta = 60^0$ ans.

हलः– 5. $4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)\right] - 3\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - (1)^2\right]$

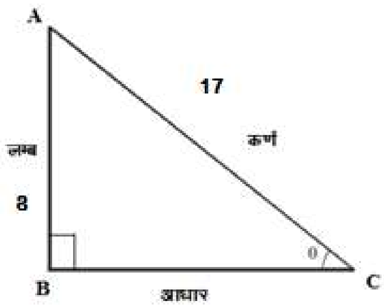
शैक्षणिक मिशन – 100

$= 4\left[\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\right] - 3\left[\frac{1}{2} - 1\right]$

$= 4\left[\frac{9}{16}\right] - 3\left[-\frac{1}{2}\right]$

$= \frac{9}{4} + \frac{3}{2} = \frac{15}{4}$ ans.

हलः– 6. $cosec\ A = \frac{\mathbf{17}}{\mathbf{8}}$ $\frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$



पाइथागोरस प्रमेय से–

$(\text{कर्ण})^2 = (\text{आधार})^2 + (\text{लम्ब})^2$

$(17)^2 = (\text{आधार})^2 + (8)^2$

$(\text{आधार})^2 = 289 - 64$

$(\text{आधार})^2 = 225$

$\text{आधार} = \sqrt{225}$

$\text{आधार} = 15$

तब $tan\ A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{8}{15}$ ans.

प्रश्नावली– 7

*त्रिकोणमितीय सर्वसमिका त्रिकोणमितीय सम्बन्धित कोणों के सभी मानों के लिए सत्य होती है।

*त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएंः–

(1) $[sin^2\theta + cos^2\theta = 1]$इसे अन्य रूप में भी काम में लिया जाता है।

$(i) sin^2\theta = 1 - cos^2\theta$

$(ii) cos^2\theta = 1 - Sin^2\theta$

(2) $[1 + tan^2\theta = sec^2\theta]$इसे अन्य रूप में भी काम में लिया जाता है।

$(i) tan^2\theta = sec^2\theta - 1$

$(ii)\ 1 = sec^2\theta - tan^2\theta$

(3) $[1 + cot^2\theta = cosec^2\theta]$इसे अन्य रूप में भी काम में लिया जाता है।

$(i)\ 1 = cosec^2\theta - cot^2\theta$

$(ii) cot^2\theta + cosec^2\theta - 1$

*पूरक कोण– यदि दो कोणों का योग 90° हो तो वे पूरक कोण कहलाते हैं।

*पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात (सूत्र) :–

(i) $sin\ (90 - \theta) = cos\ \theta$

(ii) $cos\ (90 - \theta) = sin\ \theta$

(iii) $tan\ (90 - \theta) = cot\ \theta$

(iv) $cot\ (90 - \theta) = tan\ \theta$

(v) $sec\ (90 - \theta) = cosec\ \theta$

(vi) $cosec\ (90 - \theta) = sec\ \theta$

त्रिकोणमितीय अनुपातों में परस्पर सम्बन्धः–

(i) $sin\ A = \frac{1}{cosec\ A} \rightarrow sin\ A \times cosec\ A = 1$

(ii) $cos\ A = \frac{1}{sec\ A} \rightarrow cos\ A \times sec\ A = 1$

(iii) $tan\ A = \frac{1}{cot\ A} \rightarrow cot\ A \times tan\ A = 1$

इसी प्रकार

(iv) $cot\ A = \frac{1}{tan\ A}$

(v) $sec\ A = \frac{1}{cos\ A}$

(vi) $cosec\ A = \frac{1}{sin\ A}$

महत्वपूर्ण अतिलघूतरात्मक प्रश्न :–

1. $\frac{\tan 49^0}{\cot 41^0}$ का मान ज्ञात करो।
2. $cos^2 80^0 + sin^2 80^0$ का मान ज्ञात करो।
3. $\cos 50^0\ cosec\ 40^0$ का मान ज्ञात करो।
4. $\text{cosec}\ 25^0 - \sec 65^0$ का मान लिखो।
5. $sin\ 81^0 + sin\ 71^0$ को 0^0 से 45^0 के कोणों के पदों में व्यक्त करो।
6. $sin\ 3\theta = cos\ (\theta - 6^0)$ यहाँ 3θ और $(\theta - 6^0)$ न्यून कोण हो तो θ का मान करो।

हलः– 1. $\frac{\tan 49^0}{\cot 41^0}$ (tan व cot दोनों में से एक को ही बदलेंगे)

$= \frac{\tan 49^0}{\cot(90-49)}$

$= \frac{\tan 49^0}{\tan 49^0}$ $[\cot(90-\theta) = \tan\theta]$

$= 1$

हलः–2. $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$

$sin^2 80^0 + cos^2 80^0 = 1$ ans.

हलः– 3. $cos\ 50^0 \times cosec\ (90 - 50^0)$

$= cos\ 50^0 \times sec\ 50^0$

$= cos\ 50^0 \times \frac{1}{cos\ 50^0} \left[\ cosec\ (90-\theta) = sec\theta\ \&\ sec\ \theta = \frac{1}{cos\ \theta}\right]$

$= 1$ ans.

हलः– 4. $\text{cosec}\ 25^0 - \sec 65^0$

$= \text{cosec}\ 25^0 - \sec(90 - 25^0)$

$= \text{cosec}\ 25^0 - \text{cosec}\ 25^0$

$=$ **0** ans. $[\ \sec(90-\theta) = \text{cosec}\ \theta]$

हलः–5 $\quad sin\ 81^0 + sin\ 71^0$

$= sin\ (90 - 9^0) + sin\ (90 - 19^0)$

$= cos\ 9^0 + cos\ 19^0$ans.$[\quad sin\ (90 - \theta\quad) = cos\ \theta]$

हलः– 6. $\quad sin\ 3\theta = cos\ (\theta - 6^0)$

$cos\ (90 - 3\theta) = cos\ (\theta - 6^0)$

$90 - 3\theta = \theta - 6^0$

$[\quad cos\ (90 - \theta) = sin\ \theta]$

$90 + 6 = \theta + 3\theta$(पक्षान्तरण से)

$4\ \theta = 96$

$\theta = \frac{96}{4} = 24$**ans.**

महत्वपूर्ण निबन्धात्मक प्रश्न :–

1. $\sqrt{\frac{1-sin\theta}{1+sin\theta}} = \sec\theta\ - \tan\theta$
2. $sin^6\theta + cos^6\theta = 1 - 3sin^2cos^2\theta$
3. $\sin\theta(1 + \tan\theta) + \cos\theta\ (1 + \cot\theta) = cosec\ \theta + \sec\theta$
4. $\frac{(1+\cot\theta+\tan\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{\sec^3\theta-\quad cosec^3\theta} = Sin^2\theta \times Cos^2\theta$
5. $\frac{\cos A}{1-\tan A} + \frac{\sin A}{1-\cot A} = \sin A + \cos A$
6. $\frac{\cot A+cosec\ A-1}{\cot A-cosec\ A+1} = \frac{1+\cos A}{\sin A}$

हलः– 1. $L.H.S.\sqrt{\frac{1-sin\theta}{1+sin\theta}}$

ऊपर व नीचे $(1 - \sin\theta)$ से गुणा करने पर

$= \sqrt{\frac{1-sin\theta}{1+sin\theta} X \frac{1-sin\theta}{1-sin\theta}}$

$= \sqrt{\frac{(1-sin\theta)^2}{1^2-sin^2\theta}} \qquad [(a + b)(a - b) = a^2 - b^2]$

$= \sqrt{\frac{(1-Sin\theta)^2}{1\quad -sin^2\theta}} \qquad [1\quad - sin^2\theta = cos^2\theta]$

$= \sqrt{\frac{(1-Sin\theta)^2}{cos^2\theta}}$

$= \frac{\boldsymbol{1-Sin\theta}}{\boldsymbol{Cox\theta}}$

$= \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$sec\ \theta - tan\ \theta$ R.H.S.

हलः–2. $L.H.S. \qquad sin^6\theta + cos^6\theta$

$= (sin^2\theta)^3 + (cos^2\theta)^3 \quad [a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)]$

$= Sin^2\theta + Cos^2\theta[sin^4\theta - sin^2\theta cos^2\theta + cos^4\theta]$

$= (1)[(sin^2\theta)^2 \quad - sin^2\theta\, cos^2\theta + (cos^2\theta)^2 + 2sin^2\theta\, cos^2\theta - 2sin^2\theta\, cos^2\theta]$

$= (1)[(sin^2\theta)^2 \quad + 2sin^2\theta\, cos^2\theta + (cos^2\theta)^2 - 3sin^2\theta\, cos^2\theta]$

$= (1)[(sin^2\theta + cos^2\theta)^2 \quad - 3sin^2\theta\, cos^2\theta]$

$= (1)(1^2 - 3sin^2cos^2\theta)$

$= 1 - 3sin^2cos^2\theta$ R.H.S.

हलः–3. $L.H.S.$

$\sin\theta(1 + \tan\theta) + \cos\theta\,(1 + \cot\theta)$

$= \sin\theta(1 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}) + \cos\theta\,(1 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta})$

$= \sin\theta(\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta}) + \cos\theta\,(\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta})$

$= \frac{\sin^2\theta(\cos\theta + \sin\theta) + \cos^2\theta\,(\sin\theta + \cos\theta)}{\cos\theta.\sin\theta}$

$= \frac{(Sin\theta + Cos\theta)(Sin^2\theta + Cos^2\theta)}{\cos\theta.\sin\theta}$

$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta.\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\cos\theta.\sin\theta}$

$= \frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta}$

$= \sec\theta + cosec\,\theta \qquad R.H.S.$

हलः–4. $L.H.S.$

$$\frac{(1 + \cot\theta + \tan\theta)(\sin\theta - \cos\theta)}{\sec^3\theta - \quad \mathrm{cosec}^3\,\theta}$$

$$= \frac{(1 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta})(\sin\theta - \cos\theta)}{\frac{1}{\cos^3\theta} - \frac{1}{\sin^3\theta}} \left[\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]$$

$$= \frac{\left(\frac{\sin\theta.\cos\theta + \quad \cos^2\theta + \quad \sin^2\theta}{\sin\theta \times \cos\theta}\right)(\sin\theta - \cos\theta)}{\frac{Sin^3\theta - Cos^3\theta}{Cos^3\theta \times Sin^3\theta}}$$

$$= \left(\frac{\sin\theta.\cos\theta + \quad \cos^2\theta + \quad \sin^2\theta}{\sin\theta - \cos\theta)}\right)(\sin\theta - \cos\theta) \times \frac{Cos^3\theta \times Sin^3\theta}{Sin^3\theta - Cos^3\theta}$$

$$= \left(\frac{1 + \sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)\frac{(\sin\theta - \cos\theta) \times Cos^3\theta \times Sin^3\theta}{(\sin\theta - \cos\theta)(Sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + Cos^2\theta)}$$

$$= \frac{(1+\sin\theta\cos\theta)Cos^2\theta Sin^2\theta}{(1+\sin\theta\cos\theta)} \qquad \left[a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \right]$$

$$= Cos^2\theta Sin^2\theta \text{ R.H.S.}$$

हलः–5. ***L. H. S.***

$$\frac{\cos A}{1-\tan A} + \frac{\sin A}{1-\cot A}$$

$$= \frac{\cos A}{1-\frac{\sin A}{\cos A}} + \frac{\sin A}{1-\frac{\cos A}{\sin A}}$$

$$= \frac{\cos A}{\frac{\cos A - \sin A}{\cos A}} + \frac{\sin A}{\frac{\sin A - \cos A}{\sin A}}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos A - \sin A} + \frac{\sin^2 A}{\sin A - \cos A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos A - \sin A} - \frac{Sin^2 A}{CosA - SinA}$$

$$= \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{(\cos A - \sin A)} \qquad [a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$$

$$= \frac{(\cos A + \sin A)(\cos A - \sin A)}{(\cos A - \sin A)}$$

$$= (\cos A + \sin A) \qquad \text{R.H.S.}$$

हलः–6. ***L. H. S.***

$$\frac{\cot A + cosec\, A - 1}{\cot A - cosec\, A + 1}$$

$$= \frac{\cot A + cosec\, A - (cosec^2 A - \cot^2 A)}{\cot A - cosec\, A + 1} \qquad [\quad 1 = cosec^2 A - \cot^2 A$$ का प्रयोग करने पर]

$$= \frac{\cot A + cosec\, A - [(cosec\, A + \cot A)(cosec\, A - \cot A)]}{\cot A - cosec\, A + 1}$$

$$= \frac{\cot A + cosec\, A[1-(CosecA - CotA)]}{\cot A - cosec\, A + 1}$$ कॉमन लेने पर

$$= \frac{\cot A + cosecA\ [(1 - cosec\, A + \cos A)]}{(1 + \cot A - cosec\, A)}$$

$$= \cot A + cosec\, A$$

$$= \frac{\cos A}{\sin A} + \frac{1}{\sin A} \qquad \left[\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}, cosec\, A = \frac{1}{\sin A} \right]$$

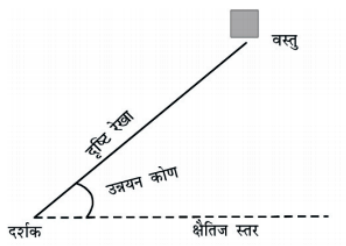
$$= \frac{\cos A}{\sin A} + \frac{1}{\sin A}$$

$$= \frac{1+\cos A}{\sin A} \qquad \text{R.H.S.}$$

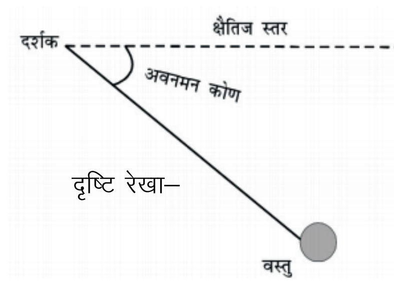
प्रश्नावली 8 ऊँचाई व दूरी

इस अध्याय में त्रिकोणमितीय अनुपातों का प्रयोग कर ऊँचाई व दूरी पर आधारित सरल समस्याओं का का अध्ययन करेगें।

- दृष्टि रेखा – जब हम किसी वस्तु को देखते है तो हमारी आंख व वस्तु को जोड़ने वाली रेखा को दृष्टि रेखा कहते है।
- उन्नयन कोण – जब कोई वस्तु आंख से ऊपर हो तो दृष्टि रेखा क्षैतिज रेखा के साथ जो कोण बनाती है। उसे उन्नयन कोण कहते है।



- अवनमन कोण – जब कोई वस्तु आंख से नीचे हो तो दृष्टि रेखा क्षैतिज के साथ जो कोण बनाती है। वह अवनमन कोण कहलाता है।



- ऊँचाई व दूरी पर आधारित प्रश्नों को हल करने सम्बन्धी ध्यान रखने योग्य बाते :–

1. इन प्रश्नों को हल करने में समकोण त्रिभुज की आकृति काम में ली जाती है।
2. प्रश्नों में यदि एक उन्नयन/अवनमन कोण दिया है तो एक समकोण एवं दो उन्नयन/अवनमन कोण दिये हो तो सामान्यतया दो समकोण त्रिभुज बनते है।
3. मीनार, पेड़ की ऊँचाई, बिजली का खम्भा, भवन आदि के लिए खड़ी लाइन (।)का प्रयोग करते है।
4. पेड़ की छाया, जमीन, समुद्र तल आदि के लिए क्षैतिज लाइन (–)का प्रयोग करते है।
5. पतंग की डोरी, टूटा हुआ पेड़, फिसल पट्टी आदि को तिरछी लाईन (/)से प्रदर्शित करते है।
6. इन प्रश्नो में एक भुजा सामान्यतः ज्ञात होती है व दूसरी भुजा अज्ञात होती है तब $\frac{\text{LAL}}{\text{KKA}}$ के अनुसार अपेक्षित त्रिकोणमितीय अनुपात लिया जाता है।

अर्थात् $\frac{\text{ज्ञात भुजा}}{\text{अज्ञात भुजा}}$ =उचित त्रिकोणमितीय अनुपात

अति लघुतरात्मक महत्वपूर्ण प्रश्न

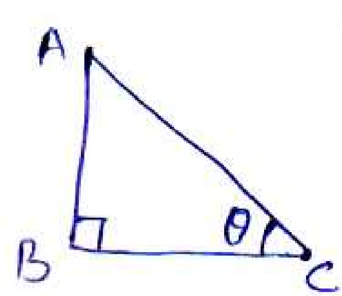
1. एक उर्ध्वाधर खम्भे की परछाई, खम्भे की ऊँचाई के बराबर है तो सूर्य का उन्नयन कोण होगा।

हल : AB– खम्भे की ऊँचाई

CB – खम्भे की परछाई

प्रश्नानुसार AB=BC

माना सूर्य का उन्नयन कोण θ है।



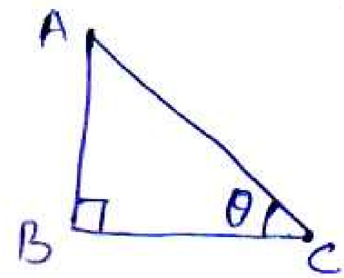
ΔABC में $\tan\theta = \frac{AB}{BC}$

$\tan\theta = \frac{AB}{AB}$

$$\tan\theta = 1$$
$$\theta = 45^0$$

2. एक उर्ध्वाधर छड़ की लम्बाई तथा इसकी छाया की लम्बाई का अनुपात 1 : $\sqrt{3}$ हो तो सूर्य का उन्नयन कोण क्या होगा।

हल : माना सूर्य का उन्नयन कोण θ है।



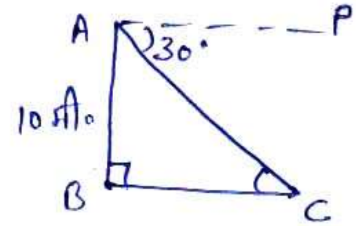
$$\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\tan\theta = \tan 30^0$$
$$\theta = 30^0$$

3. 10 मीटर ऊँची मीनार के शिखर से पृथ्वी पर एक बिन्दू अवनयन कोण 30° है तो बिन्दु मीनार के आधार से दूरी क्या होगी।

हल : यहां अवनमन कोण दिया है।

$\therefore$ PAC = ACB = 30^0 (एकान्तर कोण)

हमे BC की दूरी ज्ञात करनी है।



तब $\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{10}{BC}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{BC}$$
$$BC = 10\sqrt{3}\,Mtr.$$

4. एक पहाड़ी का ढलान क्षैतिज से 60° का कोण बनाता है यदि शिखर तक पहुंचने में 500 मीटर चलना पड़ता है तो पहाड़ी की ऊँचाई है।

हल : माना कि पहाड़ी की ऊँचाई $= x$ मी.

$$\sin 60^0 = \frac{x}{500}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{500}$$

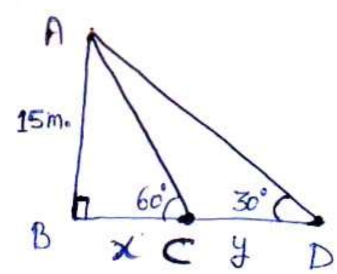
वज्र गुणा करने पर

$$2x = \sqrt{3} \times 500$$
$$x = \frac{\sqrt{3} \times 500}{2}$$
$$x = 250\sqrt{3}$$ मीटर

महत्वपूर्ण लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. सूर्य का उन्नयन कोण 30^0 से 60^0 में परिवर्तित हो जाता है तो इन दोनों उन्नयन कोणों में 15 मीटर ऊँचे खम्भे की छाया की लम्बाई में अन्तर ज्ञात करो।

हल: 15 मीटर ऊँच खम्भा है। BC व BD खम्भे की परछाई है।



माना $BC = x$ व $CD = y$ तब

समकोण त्रिभुज ABC में

$$\tan 60^0 = \frac{AB}{BC}$$
$$\sqrt{3} = \frac{15}{x}$$

$x = \frac{15}{\sqrt{3}}$ मीटर .... (1)

पुन : ΔABD में $\tan 30^0 = \frac{AB}{BD}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{15}{x+y}$$

$$x + y = 15\sqrt{3} \text{......................} \quad (2)$$

समी. (1)व (2) से

$\frac{15}{\sqrt{3}} + y = 15\sqrt{3}$

$y = \frac{15\sqrt{3}}{1} - \frac{15}{\sqrt{3}}$

$y = \frac{45-15}{\sqrt{3}} = \frac{30}{\sqrt{3}}$

$y = \frac{30}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$y = 10\sqrt{3}$ मीटर

अतः छाया की लम्बाई में अन्तर

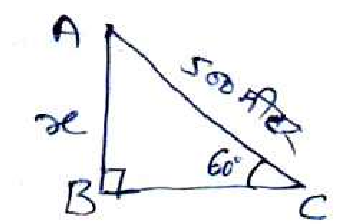
$CD = 10\sqrt{3}$ मीटर

2. समुद्र तल से 60 मीटर ऊँचे लाइट हाऊस के शिखर से देखने पर दो समुद्री जहाजों के अवनमन कोण 30^0 व 45^0 है। यदि लाइट हाऊस के दो एक ही ओर एक जहाज दूसरे जहाज के ठीक पीछे हो तो जहाजो के मध्य की दूरी ज्ञात करो।

हल : यहां AB लाइट लाइट हाऊस की ऊँचाई है तथा

C व D दोनों जहाजो की स्थिति है।

हमें दूरी CD ज्ञात करनी है।



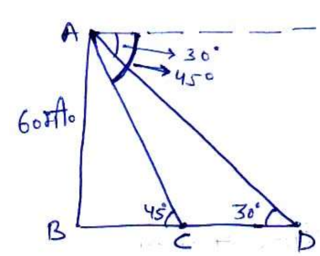
समकोण त्रिभुज ABC में

$\tan 45^0 = \frac{AB}{BC}$

$1 = \frac{60}{BC}$

$BC = 60$ मीटर

पुनः समकोण त्रिभुज ABD में



$\tan 30^0 = \frac{AB}{BC+CD}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{60}{60+CD}$

$60 + CD = 60\sqrt{3}$

$CD = 60\sqrt{3} - 60$

$CD = 60(\sqrt{3} - 1)$

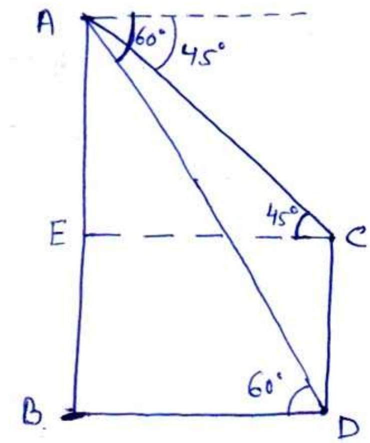
$CD = 60(1.732 - 1)$

गोरमाटी मिशन – 100

$CD = 60(.732)$

$CD = 43.92$ मीटर

3. सड़क के एक ओर एक मीनार तथा दूसरी ओर एक मकान स्थित है मीनार के शिखर से मकान की छत और आधार के अवनमन कोण क्रमश : 45^0 व 60^0 हो, यदि मकान की ऊँचाई 12 मीटर हो तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात करो। ($\sqrt{3} = 1.732$



हल : माना मीनार की ऊँचाई AB तथा मकान की ऊँचाई है $CD = 12$ मीटर है तब

चित्रानुसार $BE = 12$ मीटर होगी।

समकोण त्रिभुज AEC में

$$\tan 45^0 = \frac{AE}{EC}$$

$$1 = \frac{AE}{EC}$$

$AE = EC$ तथा

$EC = BD$ ($\therefore ECBD$) एक आयत है।

अब पुन : ΔABD में

$$\tan 60^0 = \frac{AB}{BD}$$

$$\sqrt{3} = \frac{AE+EB}{AE} \; [BD = EC = AE]$$

$$\sqrt{3}AE = AE + 12$$

$$\sqrt{3}AE - AE = 12$$

$$AE(\sqrt{3} - 1) = 12$$

$$AE = \frac{12}{\sqrt{3}-1}$$

$$AE = \frac{12}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$

$$AE = \frac{12(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$AE = 6(\sqrt{3} + 1)$$

$$AE = 6(1.732 + 1)$$

$$AE = 6(2.732)$$

$AE = 16.392$ मीटर

मीनार की ऊँचाई $= AE + BE$

$= 16.392 + 12 = 28.392$ मीटर

4. किसी मीनार के आधार से a और b दूरी पर एक ही रेखा पर स्थित दो बिन्दु क्रमशः C व D से देखने पर मीनार के शिखर के उन्नयन कोण एक दूसरे के पूरक है। सिद्ध करो कि मीनार की ऊँचाई $\sqrt{ab}$ है।

हल : माना मीनार की ऊँचाई $AB = h$ मीटर है।

C व D दो बिन्दु मीनार के आधार से कुछ दूर इस प्रकार स्थिति है कि

$BC = a$ व $BD = b$

समकोण त्रिभुज ABC में

$\tan\theta = \frac{h}{a}$ (1)

पुन :समकोण त्रिभुज ABD में

$\tan(90-\theta) = \frac{h}{b}$

$\cot\theta = \frac{h}{b}$ (2)

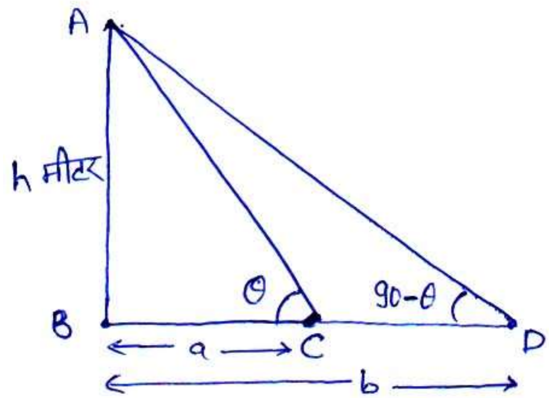
समी. (1)व (2) से

$\tan\theta \times cot\theta = \frac{h}{a} \times \frac{h}{b}$

$1 = \frac{h^2}{ab}$ $[\therefore \tan\theta\, cot\theta = 1]$

$h^2 = ab$

$h = \sqrt{ab}$



इकाई– 5(निर्देशांक ज्यामिति)

प्रश्न का प्रकार	अंक भार
निबंधात्तमक प्रश्न (1)	1 × **6 =6**
योग	**6**

9. निर्देशांक ज्यामिति – अंक – 6 (निबंधात्मक प्रश्न – 1)

- किसी बिन्दू का x निर्देशांक या भुज $y-$ अक्ष से उसकी लांबिक दूरी होती है।
- किसी बिन्दू का $y-$ निर्देशांक या कोटि $x-$ अक्ष से उसकी लांबिक दूरी होती है।
- y अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिन्दू का भुज शुन्य 0 होता है ।
- x अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिन्दू की कोटि शून्य होती है।
- मूल बिन्दू के निर्देशांक (0,0) होते है।

दो बिन्दुओं के बीच की दूरी :– बिन्दू $A(x_1, y_1,)$ व बिन्दू $B(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

महत्वपूर्ण तथ्य :– यह सिद्ध करने के लिए कि दी हुई आकृति एक

1. वर्ग है, सिद्ध करना होता है कि चारो भुजाए बराबर है एवं विकर्ण भी बराबर है।
2. समचतुर्भुज है, सिद्ध करना होता है कि चारों भुजाए बराबर है।
3. आयत है, सिद्ध करना होता है कि आमने–सामने की भुजाएं बराबर है और विकर्ण भी बराबर है।
4. समान्तर चतुर्भज है सिद्ध करना है कि आमने –सामने की भुजाएं बराबर है।

प्रश्न. 1 $(-6, 7)$ और $(-1, -5)$ के मध्य की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल :– दूरी $= \sqrt{(-1+6)^2 + (-5-7)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$ मात्रक।

प्रश्न. 2 $x -$ अक्ष पर वह बिन्दू ज्ञात कीजिए जो बिन्दूओं $(-2,-5)$ और $(2,-3)$ से समदूरस्थ है।

हल :– माना $x -$ अक्ष पर वह बिन्दू $P(x,0)$ है। प्रश्नानुसार $PA = PB$

$$PA^2 = PB^2 \rightarrow (x+2)^2 + 25 = (x-2)^2 + 9$$

$$x^2 + 4x + 4 + 25 = x^2 - 4x + 4 + 9$$

$$8x = -16 \rightarrow x = -\frac{16}{8} = -2$$

अतः उस बिन्दू के निर्देशांक $(-2,0)$ है

प्रश्न. 3 यदि P और Q के निर्देशांक क्रमशः $(a\,Cos\theta, b\,Sin\theta)$ और $(-a\,Sin\theta, b\,Cos\theta)$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $OP^2 + OQ^2 = a^2 + b^2$ जहा 0 मूल बिन्दू है।

हल :– दिया है $P\,(a\,Cos\theta, b\,Sin\theta) Q\,(-a\,Sin\theta, b\,Cos\theta)$ और $0(0,0)$ है। तब $L.H.S. = (OP)^2 + (OQ)^2 = (O - a\,Cos\theta)^2 + (b\,Sin\theta)^2 + [o - (-a\,Sin\theta)]^2 + \;[0 - b\,Cos\theta)^2$

$= a^2\,(Cos^2\theta + Sin^2\theta) + b^2(Cos^2\theta + Sin^2\theta)$ चूकि $(Cos^2\theta + Sin^2\theta = 1)$

$= a^2 + b^2 = R.H.S$

दो बिन्दुओं के मध्य दूरी का अन्तः एवं बाहय विभाजन

1. अन्तः विभाजन :– समतल में कोई दो बिन्दू $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ है और बिन्दु $P(x,y)$ रेखाखण्ड AB को $m_1 : m_2$ में अन्तः विभाजित करता है तो बिन्दू P के निर्देशांक $\left[\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_{2+m_2y_1}}{m_1+m_2}\right]$

यदि 1 : 1 में अन्तः विभाजित करता है, तो $\left[\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right]$

प्रश्न. 4 उस बिन्दू के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दू$(3,5)$ और $(7,9)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 2 : 3 के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है।

हल :– अन्तः विभाजन सूत्र से $x = \frac{2(7)+3(3)}{2+3} = \frac{14+9}{5} = \frac{23}{5}$ $, y = \frac{2(9)+3(5)}{2+3} = \frac{18+15}{5} = \frac{33}{5}$ अतः $\left(\frac{23}{5}, \frac{33}{5}\right)$ बिन्दू के निर्देशांक है

(2) बाहय विभाजन :– समतल में कोई दो बिन्दू $A(x_1, y_1)$ और $B\,(x_2, y_2)$ है और बिन्दू $P(x,y)$ रेखाखण्ड AB को $m_1{:}\,m_2$ मं बाहय विभाजित करता है तो बिन्दू P के निर्देशांक $\left[\frac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2}, \frac{m_1y_{2-m_2y_1}}{m_1-m_2}\right]$

प्रश्न. 5 उस बिन्दू के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दूओं $(-4,4)$ और $(7,2)$ को मिलाने वाली रेखाखण्ड को 4 : 7 के अनुपात में बाहय विभाजित करता हे।

हल :– बाहय विभाजन सूत्र से

$$x = \frac{4(7) - 7(-4)}{4-7} = \frac{28+28}{-3} = \frac{56}{-3} = -18\frac{2}{3},$$

$$y = \frac{4(2) - 7(4)}{4-7} = \frac{8-28}{-3} = \frac{-20}{-3} = 6\frac{2}{3}$$

अतः उस बिन्दू के निर्देशांक $\left(-18\frac{2}{3}, 6\frac{2}{3}\right)$ है।

महत्वपूर्ण प्रश्न

प्रश्न. 1 (i) सिद्ध कीजिए कि बिन्दू $(3,3), (9,0)$ तथा $(12,21)$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष है।

(ii) बिन्दूओं $(-3,5)$ और $(4,-9)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को बिन्दू $(-2,3)$ किस अनुपात में विभाजित करता है।

प्रश्न. 2 बिन्दूओं $(11,9)$ और $(1,2)$ को मिलाने वाली रेखा को समत्रिभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

प्रश्न. 3 उस त्रिभुज की माध्यिकाओं की लम्बाइयां ज्ञात कीजिए, जिसके शीर्ष $(1,-1),(0,4)$ और $(-5,3)$ है।

प्रश्न. 4 वह अनुपात ज्ञात कीजिए जबकि बिन्दू $(-3,P)$ बिन्दुओं $(-5,-4)$ और $(-2,3)$ को अन्तः विभाजित करता है। P का मान भी ज्ञात कीजिए।

प्रश्न. 5 (i) यदि बिन्दुओं $(3,K)$ और $(K,5)$ से बिन्दु $(1,2)$ की दुरियाँ बराबर हो तो K का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) बिन्दुओं $(5,3)$ और $(-3,-2)$ का मिलाने वाली रेखाखण्ड $x-$ अक्ष द्वारा किस अनुपात में विभाजित होता है।

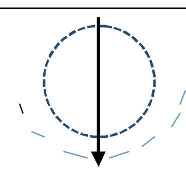
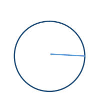
प्रश्न. 6 यदि त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दू $(1,2),(0,-1)$ और $(2,-1)$ है, तो त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

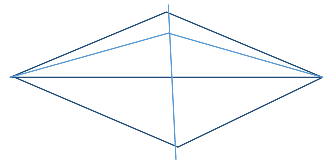
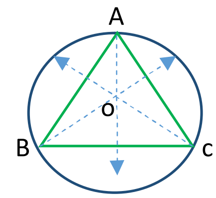
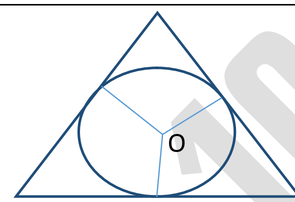
ज्यामिति (प्रश्नावली–10,11,12,13,14)	कुल अंकभार(20)
अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न (2)	1 (2) = 2
लघुत्तरात्मक प्रश्न (4)	3 (4) = 12
निबंधात्मक प्रश्न (1)	6 (1)* = 6

अध्याय–10

बिंदुपथ

अतिलघुत्रात्तमक प्रश्न (1 अंक)

क्र. सं.	प्रश्न	हल	चित्र
1	किसी समतल पर लुढ़कने वाले वृत्त के केन्द्र का बिंदुपथ	समतल के समांतर रेखा	
2	घड़ी के पेंडुलम का बिंदुपथ	वृत्त का चाप	
3	घड़ी की सुई का बिंदुपथ	वृत्ताकार	
4	एक स्थिर बिंदु से समदूरस्थ बिंदु का बिंदुपथ	वृत्त की परीधि	

5	दो स्थिर बिंदुओं से समदूरस्थ बिंदु का बिंदुपथ	दोनों बिंदुओं को मिलने वाली रेखा का लंब समद्विभाजक	
6	त्रिभुज के शीर्षों से समदूरस्थ बिंदु	परिकेन्द्र	
7	त्रिभुज की भुजाओं का समदूरस्थ बिंदू	अंतःकेन्द	

बिंदुपथ – दी गई शर्त के अनुसार बिंदुओं के गमन का रास्ता।

(ब) 3 अंक भार के लघुत्तात्मक प्रश्न

(1) त्रिभुज ABC में मध्यिका AB, BE, CF एक बिंदु G से गुजरने है। यदि $AG = 6Cm, BE = 12.6Cm$ व $FG = 3CM$ तो AD, GE और GC ज्ञात कीजिये?

हलः– केंद्रक G मध्यिका को 2 : 1 में विभाजित करती ळें

अतः $AG = 2a$ व $GD = a$ व $AD = 3a$

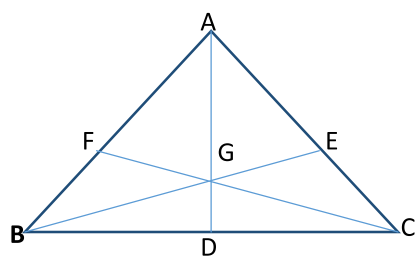
दिया है (I) $AG = 6Cm$

$2a = 6Cm$

$a = \frac{6}{2}$

$a = 3Cm$

अतः $AD = 3 \times 3 = 9$



(II) $BG = 2b$, $GE = b$, $BE = 3b$

दिया है $BE = 12.6$

$3b = 12.6$

$b = \frac{12.6}{3} = 4.2$

अतः $GE = b = 4.2$

(III) $GC = 2c$, $GF = c$, $CF = 3c$

अतः दिया है $FG = 3Cm$

$c = 2\ Cm$

$GC = 2 \times 3 = 6$

(2) त्रिभुज ABC में मध्यिकाएं AD , BE, और CF बिंदु G पर प्रतिच्छेद करती हैं सिद्ध कीजिए कि–

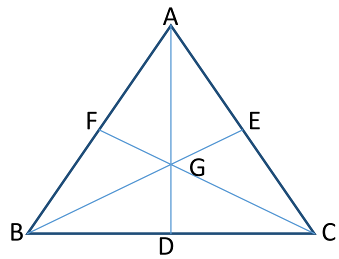
$AD + BE > \left(\frac{3}{2}\right) AB$

हल त्रिभुज में (त्रिभुज में दो भुजा का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।)

$AG + BG > AB$,मान रखने पर

$\frac{2}{3}AD + \frac{2}{3}BE > AB$

$AD + BE > \frac{3}{2}AB$



याद रखने योग्य

(3)यदि एक त्रिभुज की सभी मध्यिकाएं समान हो तो वह त्रिभुज समबाहु होगा।

हल– दिया है:– त्रिभुज ABC की मध्यिकाएं AD, BE व CF बिंदु G पर मिलती हैं तथा $AD = BE = CF$

सिद्ध करना है– त्रिभुज ABC एक समबाहु त्रिभुज होगा।

उपपति– हम जानते हैं कि त्रिभुज की मध्यिकाओं को केन्द्रक 2 : 1 में विभाजित करता है।

अतः $AD = BE = CF$ (दिया है)

$\frac{2}{3}AD = \frac{2}{3}BE = \frac{2}{3}CF$

$\Rightarrow AG = BG = CG \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

इसी प्रकार $\frac{1}{3}AD = \frac{1}{3}BE = \frac{1}{3}CF$

$GD = GE = GF \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

$AG = 2a$	$BG = 2b$
तो $a = \frac{AG}{2}$	तो $b = \frac{BG}{2}$
अतः $AD = 3a$	$BE = 3b$
$\frac{3}{2}AG$	$= \frac{2}{3}BG$
$AG = \frac{2}{3}AD$	$BG = \frac{2}{3}BE$

त्रिभुज BGF व CGE में

(1) से $BG = CG$

(2) से $GF = GE$

$\angle BGF = \angle CGF$

शीर्षभिमुख कोण

भुजा– कोण– भुजा से $\Delta BGF \cong \Delta CGE$

अतः सर्वांगसम त्रिभुज की संगत भुजाएं समान होती हैं।

$BF = CE$

$2BF = 2CE$

$AB = AC \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

इसी प्रकार $\Delta CGD \cong \Delta AGF$

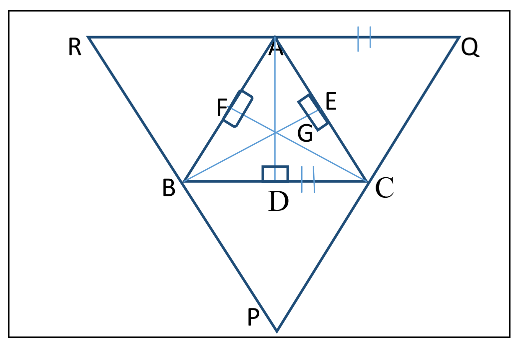
$BC = AB \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (4)$

(3) व (4) से $AB = BC = AC$

अतः त्रिभुज ABC एक समबाहु त्रिभुज है।

(4) सिद्ध कीजिए की शीर्ष लंब समांगी (एक ही बिंदु से गुजरते) होते हैं।

हल– दिया हुआ है– एक त्रिभुज ABC जिसमें AD, BE व CF शीर्ष लम्ब (शीर्ष से सामने डाला गया लम्ब) है।



सिद्ध करना है– शीर्ष लम्ब AD, BE व CF एक ही बिन्दु G से गुजरते हैं।

रचना– A से गुजरती हुई BC के समांतर रेखा QR खिंची। इसी प्रकार $PR \,||\, AB$ एवं $PQ \,||\, AB \,||$ खींचकर त्रिभुज PQR बनाया।

उपपति– (1) चतुर्भुज $BCAR$ में $AC \,||\, BR$ एवं $PQ \,||\, AR$ (रचना से)

आमने सामने की भुजाएं समांतर होने से $BCAR$ समांतर चतुर्भुज होगा।

अतः $AR = BC \ \ldots\ldots\ldots (1)$ (सम्मुख भुजाएं बराबर)

(2) इसी प्रकार चतुर्भुज $BCQA$ में $AB \,||\, CQ$ एवं $AQ \,||\, BC$ (रचना से)

अतः $BC = AQ \ldots\ldots\ldots (2)$

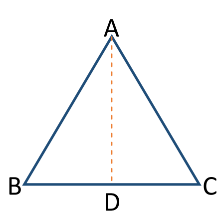
समीकरण (1) व (2) से $AR = AQ \ldots\ldots\ldots. (3)$

एवं $AD \perp BC$ इसी प्रकार BE लम्ब अर्द्धक है PR का तथा CF लम्ब अर्द्धक हैं PQ का लम्ब अर्द्धक समांगी होते हैं। अतः AD, BE, CF समांगी होंगे।

प्रमुख परिभाषा–

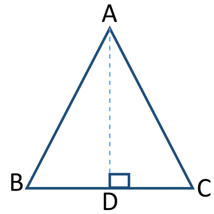
(अ) बिंदुपथ – विशेष नियम के द्वारा बने बिन्दुओं के समुच्चय से निर्मित पथ

(ब) माध्यिका– त्रिभुज के शीर्ष के सम्मुख भुजा के मध्य बिंदु से मिलाने वाला रेखाखण्ड।



(स) शीर्ष लम्ब– त्रिभुज के शीर्ष से सम्मुख भुजा पर लम्ब। चित्र में AD शीर्ष लम्ब है।

(द) समांगी रेखाएं– तीन या तीन से अधिक रेखाएं यदि एक ही बिंदु से होकर गुजरे वो समांगी रेखाएं कहलाती हैं।



प्रश्नावली–11

समरूपता

अति लघुरात्मक प्रश्न (अंकभार–1)

प्र. यदि त्रिभुज ABC~ त्रिभुज DEF हो तो एवं AB=10 सेमी हो तथा DE=8 सेमी हो तो Δ ABC का क्षेत्रफल व Δ DEF का क्षेत्रफल का अनुपात ज्ञात करो

हलः– Δ ABC ~ Δ DEF

$$\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्र फल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्र फल}} = \frac{AB^2}{DE^2} = \left(\frac{10}{8}\right)^2 = \frac{100}{64} = \frac{25}{16}$$

प्र. समरूप त्रिभुजों में भुजाओं का अनुपात 4:9 है तो क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात करो।

हल–समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात=(भुजाओं का अनुपात)^2 = $\left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$

प्र. दो समरूप त्रिभुजो की ऊँचाईयों को अनुपात 2:3 है। तो क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात करो।

हलः–समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात = (ऊँचाइयों का अनुपात)^2 = $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

प्र. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात 16:81 है तो त्रिभुजों की संगत माध्यिकाओं का अनुपात ज्ञात करो।

हलः– समरूप त्रिभुज के क्षेत्रफलों का अनुपात = (संगत माध्यिकाओं का अनुपात)^2

$\frac{16}{81}$ = (संगत माध्यिकाओ का अनुपात)^2

$\sqrt{\frac{16}{81}}$ = संगत माध्यिकाओं का अनुपात

संगत माध्यिकाओं का अनुपात = $\frac{4}{9}$

सम्बधित महत्वपूर्ण प्रमेय (निम्बन्धात्मक अंकभार–6)

समरूपता की अवधारणा से

1. बोधायन प्रमेय अथवा पाइथोगोरस प्रमेंय को कथन सहित सत्यापित कीजिए अथवा सिद्व कीजिए कि समकोण त्रिभुजों में कर्ण पर बना कोण शेष भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है।

2. सिद्व कीजिए कि दो समरूप त्रिभुज के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओ के वर्गों के अनुपात के समान होता है।

[Note- इसी प्रकार सिद्व कीजिए कि दो समरूप त्रिभुज के क्षेत्रफलों का अनुपात

(i) उनकी संगत ऊँचाइयों के वर्गों के समानुपाती होता है।

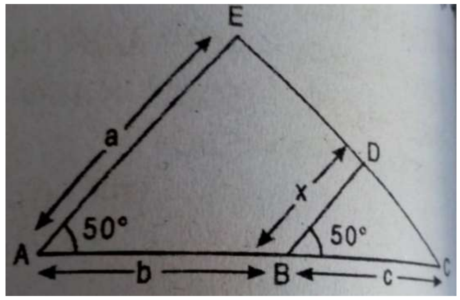
(ii) उनकी संगत शीर्षलम्बों के वर्गों के समानुपाती होता है।

(iii) उनकी संगत माध्यिकाओं के वर्गों के समानुपाती होता है।

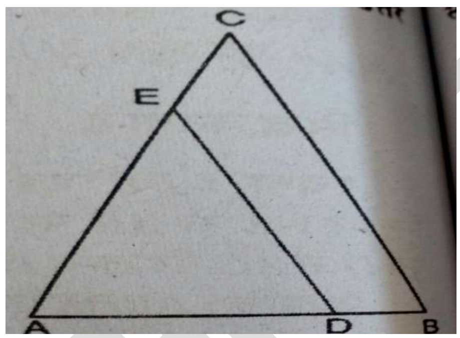
(iv) उनके संगत कोणों के समद्विभाजकों के वर्गों के समानुपाती होता है।

3. आधारभूत समानुपाती प्रमेय (थेल्स प्रमेय) को कथन सहित सत्यापित कीजिए। अथवा सिद्व कीजिए कि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर खींची गई रेखा त्रिभुज की शेष दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है

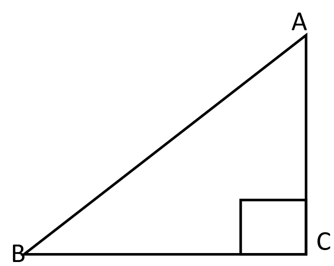
सम्बन्धित प्रश्न– 1 आकृति में का मान a, b एवं c के पदों में ज्ञात कीजिए



प्रश्न 2 : दी गई आकृति में DE II BC है यदि AD=x, DB= x-2, AE=x+2 और EC = x-1 है तो x का मान ज्ञात करो



प्र. एक हवाई जहाज एक हवाई अड्डे से उत्तर की और 1000 किमी/घंटा की चाल से उड़ता है। उसी समय एक अन्य हवाई जहाज उसी हवाई अड्डे से पश्चिम की और 1200 किमी/घंटा की चाल से उड़ता है। $1\frac{1}{2}$ घण्टे बाद दोनों हवाई जहाजों के मध्य की दूरी कितनी होगी ?



हल- प्रथम हवाई जहाज

कि उत्तर दिशा मे $1\frac{1}{2}$ घण्टे

बाद हवाई अड्डे से दूरी

= चाल x समय

$= 1000 \times \frac{3}{2} = 1500$ किमी

दूसरे हवाई जहाज की पश्चिम दिशा में $1\frac{1}{2}$ बाद हवाई अड्डे से दूरी = चाल x समय = 1200 x 3 /2 = 1800 किमी

आकृतिनुसार, $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (बोधायन प्रमेय से)

$$AB^2 = 1500^2 + 1800^2$$

= 22,50, 000 + 32, 40, 0000

= 54, 90, 000

$AB = \sqrt{54,90,000}$

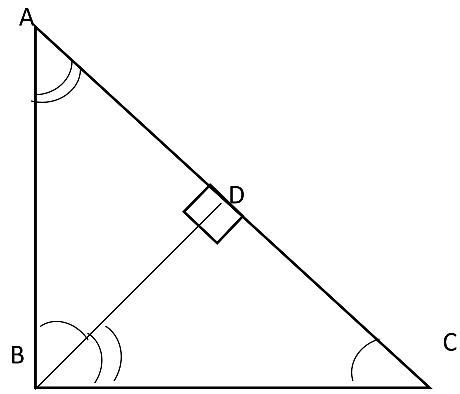
$AB = 300\sqrt{61}$ किमी.

प्र. त्रिभुज ABC में $\angle B = 90^0$ हो एवं BD कर्ण AC पर लम्ब हो तो सिद्ध कीजिए। त्रिभुज ADB~त्रिभुज BDC

हल : दिया है– त्रिभुज ABC में $\angle B = 90^0$

तथा BD $\perp$ AC

सिद्ध करना है : त्रिभुज ADB~त्रिभुज BDC



त्रिभुज ABC में,

$\angle A + \angle C = 90^0$ ($\angle B = 90^0$ हैं)................(i)

त्रिभुज BDC में,

$\angle DBC + \angle C = 90^0 (\angle BDC = 90^0)$.........(ii)

समीकरण (i) व (ii) से,

$\angle A + \angle C = \angle DBC + \angle C$

अथवा $\angle A = \angle DBC$.......................(iii)

अब त्रिभुज ADB व त्रिभुज BDC में,

$\angle ADB = \angle BDC = 90^0$ (दिया है)

$\angle DAB = \angle DBC$ (समी.iii से)

A-A समरूपता कसौटी से

त्रिभुज ADB ~ त्रिभुज BDC

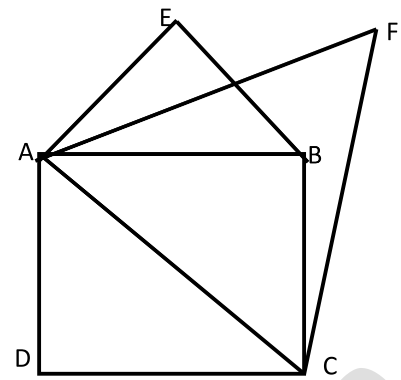
इति सिद्धम्

प्र. सिद्ध कीजिए कि एक वर्ग की किसी भुजा पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल उसी वर्ग के एक विकर्ण पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

हल :– दिया है–ABCD एक वर्ग है जिसकी एक भुजा AB तथा विकर्ण AC है। AB तथा AC भुजा पर समबाहु त्रिभुज ABE तथा त्रिभुज ACF बनाए गए हैं।

सिद्ध करना है–

त्रिभुज ABE का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ त्रिभुज ACF का क्षेत्रफल



उपपत्ति : समकोण त्रिभुज ABC में

$AC^2 = AB^2+BC^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

या $AC^2= AB^2+AB^2$ (BC=AB)

या $AC^2=2AB^2$

इसलिए $AC = \sqrt{2}\, AB$

भुजा AB पर बने समबाहु त्रिभुज ABE का क्षेत्रफल

$$= \frac{(AB)^2\sqrt{3}}{4}$$

तथा विकर्ण AB पर बने समबाहु त्रिभुज ACF का क्षेत्रफल

$$= \frac{(AC)^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{इसलिए} = \frac{Area\ of\ ABE}{Area\ of\ \ ACF} = \frac{\frac{(AB)^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{(AC)^2\sqrt{3}}{4}}$$

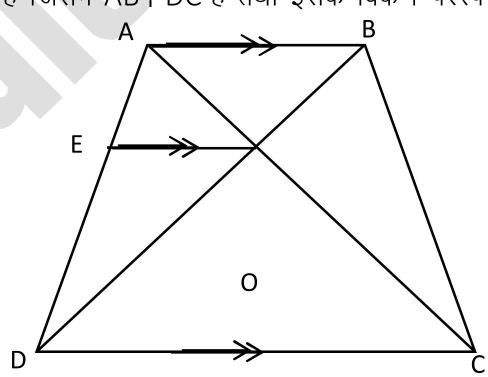
$$\frac{(AB)^2\sqrt{3}}{(AB)^2\sqrt{3}} = \frac{(AB)^2}{(AC)^2} = \frac{(AB)^2}{(AC)^2}$$

$$\left(\frac{AB}{\sqrt{2}AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

अतः त्रिभुज ABE का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ ACF का क्षेत्रफल

इति सिद्धम्।।

प्र. ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसमें AB। DC है तथा इसके विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते है। दर्शाइए कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ हैं।



हल :– दिया है : समलम्ब चतुर्भज ABCD है जिसमें AC और BD दो विकर्ण है, जो परस्पर O बिन्दु पर काटते है।

सिद्ध करना है : $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

उपपत्ति : त्रिभुज ADC में,

OE ।। DC

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AO}{CO} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots i$$

(आधारभूत समानुपातिक प्रमेय से)

समलम्ब चतुर्भुज ABCD में,

AB ।। CD

इसलिए OE ।। CD (रचना से)

OE ।। AB

अब त्रिभुज ADB में

OE ।। AB

$$\frac{ED}{AE} = \frac{DO}{BO}$$

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BO}{DO} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ii$$

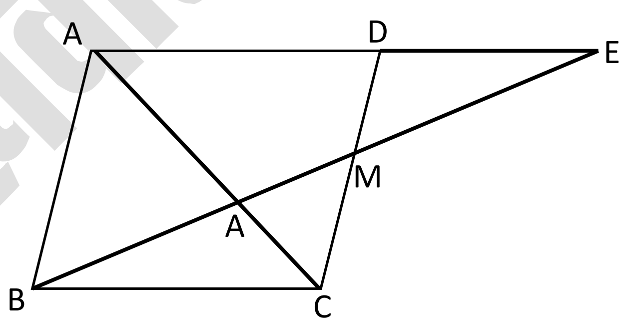
समीकरण (i) व समीकरण (ii) से,

$$\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$$

या $$AO \times DO = BO \times CO$$

$$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$$ **इति सिद्धम्**

प्र. समान्तर चतुर्भुज ABCD की भुजा CD के मध्य बिन्दु M को B से मिलाने वाली रेखा AC को L पर काटती है। यदि AD व BM को आगे बढाये तो वह E पर मिलती है तो सिद्ध किजीए। EL = 2BL



हल : त्रिभुज BMC व EMD में

MC = MD (M, CD का मध्य बिन्दु है)

∠CMB = ∠DME (शिर्षाभिमुख कोण)

∠MCB = ∠MDE (एकान्तर कोण)

अतः ASA सर्वांगसम नियम द्वारा

त्रिभुज BMC ≅ त्रिभुज EMD

अतः BC = ED परन्तु AD = BC

(ABCD समान्तर चतुर्भुज है)

और AE = AD + DE

या AE = BC + BC

या AE = 2BC

त्रिभुज AEL व त्रिभुज CBL में

∠ALE = ∠CLB (शिर्षाभिमुख कोण)

∠EAL = ∠BCL (एकान्तर कोण)

अतः AA समरूपता प्रमेय द्वारा

त्रिभुज AEL ~ त्रिभुज CBL

या $\frac{EL}{BL} = \frac{AE}{CB}$

या $\frac{EL}{BL} = \frac{2BC}{BC}$ (समीकरण प्रथम से)

या $\frac{EL}{BL} = 2$

या EL = 2BL

इति सिद्धम्

गोरखपुरी मिशन – 100

ध्यान देने योग्य तथ्य –

A. दो त्रिभुजो को सर्वांगसम करने के लिए निम्नलिखित बिन्दुओं पर ध्यान देना आवश्यक है ।

(1) दोनो त्रिभुजो में जो अवयव (भुजा व कोण) समान दिए गये है, उन्हे बराबर के रूप में लिखें ।

(2) यदि दोनों त्रिभुजो में कोई उभयनिष्ठ भुजा हो तो, उन्हें बराबर के रूप मे लिखें ।

(3) यदि दोनों त्रिभुजो में कोई उभयनिष्ठ कोण हो, तो उन्हे बराबर के रूप मे लिखें ।

(4) उपरोक्त क्रिया के पश्चात् अन्य कोई भुजा या कोण समान है तो उन्हे बराबर लिख दे ।

तत्पश्चात् निम्न गुणधर्मो मे उपयुक्त गुणधर्म का चयन कर दोनो त्रिभुजो को सर्वांगसम करे ।

(i) भुजा - भुजा - भुजा (SSS)

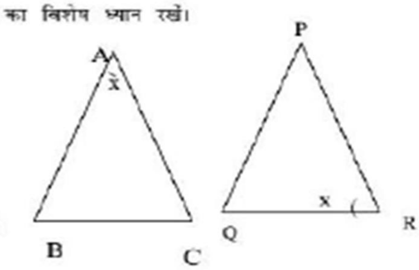
(ii) भुजा - कोण - भुजा (SAS)

(iii) कोण - भुजा - कोण (ASA)

(iv) कोण - कोण - भुजा (ASA)

(vi) समकोण- कर्ण - भुजा (RHS)

B. सर्वांगसम करते समय त्रिभुजों के अवयवों की संगतता का विशेष ध्यान रखें।



(i) जिन कोणों को बराबर सिद्ध किया है।
उन्हें त्रिभुजो के नामकरण मे पहले लिखें ।
जैसे $\angle A = \angle R$ है तो त्रिभुजों के नामकरण
मे A व R पहले लिखें ।

(ii) AB = PR है तो AB के सामने C कोण
व PR के सामने Q कोण को द्वितीय स्थान पर लिखें।

(iii) अब शेष बचे शीर्ष को लिख दें ।
अर्थात् $\Delta ACB \cong \Delta RQP$

समरूपता:- दो त्रिभुज ΔPQR मे यदि ।

$\angle A = \angle Q$ - (i)
$\angle B = \angle R$ - (ii)
$\angle C = \angle P$ - (iii) है तो त्रिभुजो को

समरूप इस प्रकार लिखे ।

$\Delta ABC \sim \Delta QRP$
1 2 3 1 2 3

इनकी भुजाओ के अनुपात भी इसी क्रम मे लिखें ।

जैसे $\Delta ABC \sim \Delta QRP$

$$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{RP} = \frac{AC}{QP}$$

समरूपता व सर्वांगसमता में भिन्नता ।

(i) समरूपता मे भुजाओ का अनुपात समान होता है ।
जबकि सर्वांगसमता में संगत भुजाओं का नाप समान रहत है ।

(ii) प्रत्येक सर्वांगसम त्रिभुज समरूप होते है। परन्तु सभी समरूप त्रिभुजो का सर्वांगसम होना आवश्यक नही होता है ।

प्रमेय को हल करते समय निम्न पदों पर ध्यान दें ।

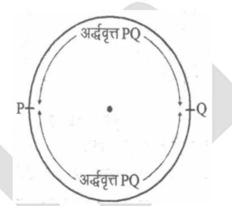
1. दिया है:- प्रमेय के कथन मे दिये गये प्रतिबन्ध या चित्र के बारे में आवश्यक हिस्सा लिखे ।
2. सिद्ध करना है:- प्रमेय के कथन में जो पूछा गया है उसे गणितीय रूप मे लिखें ।
3. रचना:- आवश्यकता अनुसार रचना करें ।
4. उपपति:- दिये गये प्रतिबन्ध व रचना से मिलने वाले पदो को क्रमानुसार लिखें व इनसे उपयुक्त हल प्राप्त करें ।

प्रश्नावली – 12

वृत्त

महत्वपूर्ण बिन्दु :–

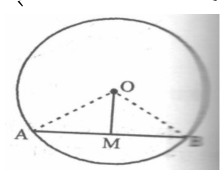
1. वृत किसी तल पे उन बिन्दुओं का बिन्दुपथ होता है जो तल पे एक स्थिर बिन्दु से समान दूरी पर रहते है।
2. स्थिर बिन्दु वृत का केन्द्र व नियत दूरी वृत की त्रिज्या कहलाती है।
3. वृत पर स्थित किन्दी दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाखण्ड वृत की जीवा कहलाता है।
4. वृत की जीवा वृत को दो भागों में विभाजित करता है।



   (i) लघु वृत खण्ड (ii) दीर्घवृत खण्ड
5. इन वृत खण्डों के संगत चाप
   (i) लघु चाप (ii) दीर्घ चाप
6. लघुचाप का डिग्री माप 180° से कम व दीर्घचाप का डिग्री चाप 180° से ज्यादा होता है।
7. तीन बिन्दुओं (असंरेखीय) से गुजरने वाला केवल एक वृत होता है।

कुछ महत्वपूर्ण प्रमेय

प्रमेय– सिद्ध कीजिये की वृत के केंन्द्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।



(1) दिया है – एक वृत्त जिसक केंन्द्र 0 है। जीवा AB है तथा $OM \perp AB$ है।

(2) सिद्ध करना है – AB = BM

(3) रचना – केन्द्र O बिन्दु A व B से मिलाया ।

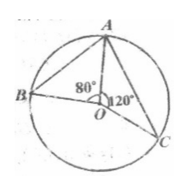
(4) उपपति – त्रिभुज OMA तथा त्रिभुज OMB में भुजा OA = भुजा OB (चूंकि एक ही वृत्त की त्रिज्याये है $\angle AMO = \angle BMO$ (दोनों समकोण है चूंकि OM (AB) भुजा OM = भुजा OM (उभयनिष्ट है)

अतः त्रिभुज OMA = त्रिभुज OMB

अतः $\Delta OMA = \Delta OMB$

AM = BM

Ex. दी गई आकृति में चाप AB और AC द्वारा केंन्द्र पर अन्तरित कोण क्रमश 80° तथा 120° है। कोण BAC तथा BOC ज्ञात करो।



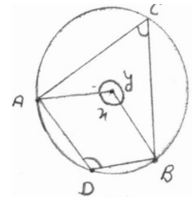
हल $\angle BOC = 360-(80+120)$

$= 160$

$\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$

$= \frac{160}{2} = 80^\circ$

प्रमेय – चक्रीय चतुर्भुज के अभिमुख कोण संपूरक होते है



(1) दिया है – ADBC एक चक्रीय चतुर्भुज है।

(2) सिद्ध करना है –

$<C + <D = 180^\circ$

या $<A + <B = 180^\circ$

(3) रचना – वृत्त के केंन्द्र O को बिन्दु A तथा B से मिलाया ।

(4) उपपति – हम जानते है कि वृत्त के किसी चाप द्वारा, परिधि के किसी बिन्दु बना कोण, उसी चाप द्वारा बने कोण का दोगुना होता है।

चूंकि चाप AB द्वारा केन्द्र पर बना कोण AOB = $\varkappa$ तथा परिधि के बिन्दु पर बना कोण C है।

अतः $\angle C = \frac{1}{2}\varkappa$ ....(1)

इसी प्रकार $\angle D = \frac{1}{2} y$ ....(2)

समी. (1) तथा (2) को जोड़ने पर

$\angle C + \angle D = \frac{1}{2}[\varkappa + y]$

चूंकि केंन्द्र पर बने सभी कोणों का योग 360° होता है।

अतः $\varkappa + y = 360^\circ$

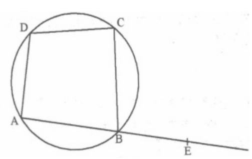
$\angle C + \angle D = \frac{1}{2}(360) = 180$

चूंकि चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360 होता है।

अतः $\angle A + \angle B = 360 - 180 = 180^\circ$

प्रमेय – चक्रीय चतुर्भुज की एक भुजा बढाने पर बनाने वाला बहिष्कोण उसके अतंराभिमुख कोण के बराबर होता है।

दिया है – एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD जिसकी भुजा AB को E तक आगे बढाया गया है। इस प्रकार बना



बहिष्कोण $\angle 3$ है

सिद्ध करना है – $\angle CBE = \angle CDA$

या $\angle 3 = <5$

उपपति – $\angle 2 + \angle 3 = 180$ ....(1)

चक्रीय चतुर्भुज के अभिमुख कोण संपूरक (180°) होते है।

$<2 + <3 = 180^\circ$.....................(2)

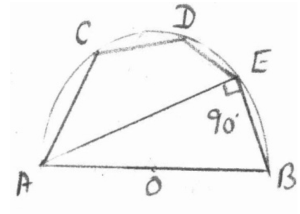
समी. (1) तथा (2) की तुलना करने पर

$\angle 2 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 5$

या $\angle 3 = \angle 5$

बहिष्कोण = अंतराभिमुख कोण

प्रश्न – आकृति में AOB वृत्त का व्यास है तथा C, D और E अर्धवृत्त पर कोई तीन बिन्दु है। $\angle ACD + \angle BED$ का मान ज्ञात करो।



हल :– A को E से मिलाने पर

$\angle$ AEB = 90° - (1) (अर्द्धवृत में बना कोण समकोण होता है।)

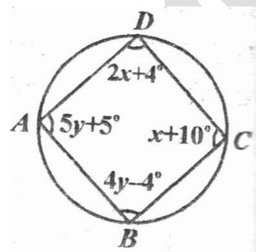
तथा $\angle$ ACD + $\angle$ AED = 180° (2) (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

(1) + (2) से

$\angle$ ACD + $\angle$ AED + AEB = 180° + 90°

$\angle$ ACD + $\angle$ BED = 270°

प्रश्न – ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है । X ओर Y मान ज्ञात करो।



हल – चित्रानुसार

$\angle A + \angle c = 180°$

X+10+5 Y+ 5 = 180°

X+5y + 15 = 180°

x+5y+168° ....(1)

तथा $\angle$ B + $\angle$ D = 180°

2x+ 4+4y-4= 180°

2x + 4y = 180°

x+ 2y = 90°

(1) व (2) से x= 40°, Y = 25° ....(2)

संबंधित प्रश्न

प्रश्न –– AB और CD वृत की दो जीवाएँ इस प्रकार है कि AB = 10 सेमी, CD = 24 सेमी और AB || CD है। AB व CD के बीच की दूरी 17 सेमी है। वृत की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

प्रश्न –– P Q R त्रिभुज ABC की भुजा BC, CA तथा Ab भुजाओं के मध्य बिन्दु है तथा AD शीर्ष A से BC पर लम्ब है। सिद्व करो PQR D एक चक्रीय चतुर्भुज है।

प्रश्नावली–13
वृत्त एवं स्पर्श रेखा

1. एक वृत्त पर स्थित एक बिंदु से कितनी स्पर्श रेखाऐं खींची जा सकती है।
उत्तर :– एक

2. एक वृत्त के अन्दर स्थित एक बिंदु से कितनी स्पर्श रेखाऐं खींची जा सकती है ?
उत्तर :– शून्य

3. एक वृत्त के बाहर स्थित एक बिंदु से कितनी स्पर्श रेखाऐं खींची जा सकती है ?
उत्तर :– दो

4. वृत्त को दो बिन्दूओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को क्या कहते है ?
उत्तर :– छेदन रेखा

5. एक वृत्त की कितनी समान्तर स्पर्श रेखाऐं हो सकती है ?
उत्तर :– दो

6. वृत्त तथा स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिन्दु को क्या कहते है ?
उत्तर :– स्पर्श बिंदु

7. दो वृत्त बाह्यतः स्पर्श करते हैं, यदि दोनो वृत्तो की त्रिज्याऐं क्रमशः 5 सेमी. तथा 3 सेमी. हो तो उनके केन्द्रो के बीच की दूरी लिखिए।
उत्तर :– 5+3=8 सेमी.

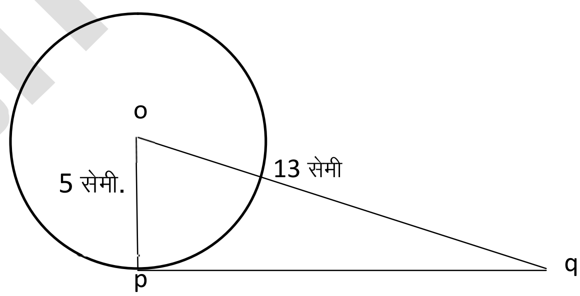
8. दो वृत्त एक–दूसरे को अन्तःस्पर्श करते है, तो उनकी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओ की संख्या लिखिए।
उत्तर :– एक

9. 5 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त के केन्द्र से 9 सेमी. दूर बाह्य बिंदु से वृत्त पर कितनी स्पर्श रेखाऐं खींची जा सकती है ?
उत्तर :– दो

10. किसी वृत्त की त्रिज्या एवं स्पर्श रेखा के मध्य कितने डिग्री का कोण बनता है ?
उत्तर :– 90^0

11. एक वृत्त पर कितनी स्पर्श रेखाऐं खीची जा सकती है ?
उत्तर :– अनन्त

12. एक बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई ज्ञात किजीए जबकी बिंदु कि वृत्त के केन्द्र से दूरी 13 सेमी. और वृत्त कि त्रिज्या 5 सेमी. है।



उत्तर :–

$OQ^2=PO^2+PQ^2$

$PQ^2=OQ^2 - PO^2$

$PQ^2=13^2 - 5^2$

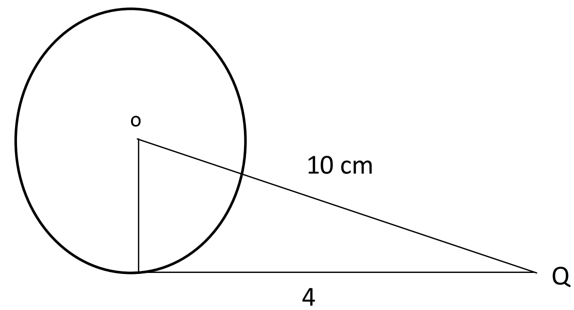
$PQ^2=169-25$

$PQ^2=144$

$PQ=\sqrt{144}$

PQ=12 cm

13. किसी वृत्त के केन्द्र से 10 सेमी. दूर स्थित किसी बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई यदि 4 सेमी. है तो वृत्त की त्रिज्या कितनी होगी ?



उत्तर :—

$OQ^2=OP^2+PQ^2$

$OP^2=OQ^2-PQ^2$

$OP^2=10^2-4^2$

$OP2 = 100-16$

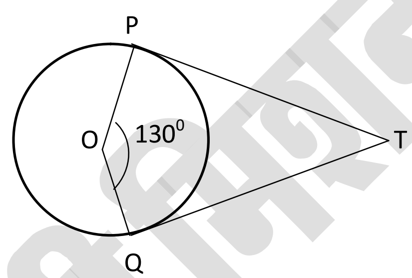
$OP=\sqrt{84}$

$OP=\sqrt{2\times2\times3\times7}$

$OP=2\sqrt{21}$

14. चित्र में यदि TP और TQ केन्द्र व वाले वृत्त पर दो स्पर्श रेखाऐ इस प्रकार हैं कि $\angle POQ = 130^0$ तो $\angle PTQ$ का मान ज्ञात किजीए।

उत्तर :—



चूंकी PT एवं QT स्पर्श रेखाऐं हैं।

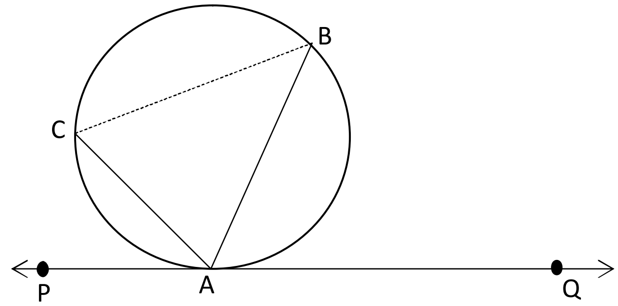
इसलिए $\angle TPO = \angle TQO = 90^0$

$\angle POQ + \angle PTQ = 180^0$

$130^0 + \angle PTQ = 180^0$

$\angle PTQ = 180-130 = 50^0$

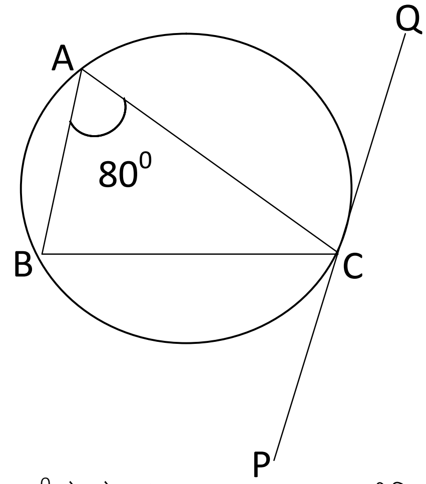
15.



दिए गये चित्र में $\angle BAQ$ का एकान्तर वृत्तखण्ड लिखो।

उत्तर :— ACB

16.



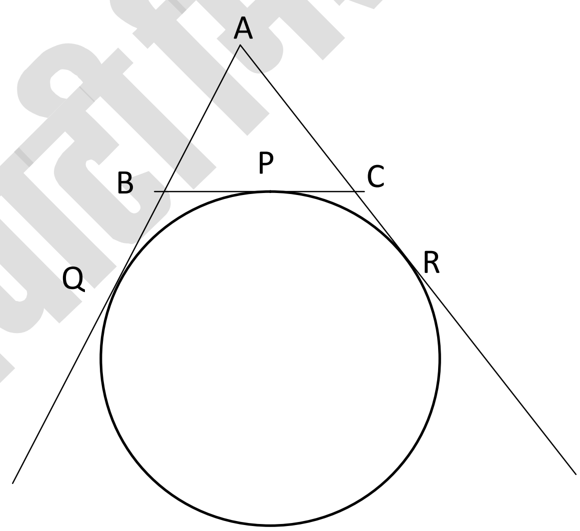
दिए गये चित्र में यदि $\angle BAC=80^0$ हो तो $\angle BCP$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर :— यदि वृत्त की स्पर्श रेखा के स्पर्श बिंदु से एक जीवा खींची जाऐ तो इस जीवा द्वारा दी गई स्पर्श रेखा के साथ बनाये गए कोण क्रमशः उसी जीवा द्वारा एकान्तर वृत्तखण्डो में बने कोण के बराबर होते है।

इसलिए $\angle BCP = \angle BAC=80^0$

$\angle BCP = 80^0$

17. दी गई आकृति में त्रिभुज ABC का बर्हिवृत्त भुजाओं को Q, P एवं R पर स्पर्श करता है यदि AQ = 8 सेमी. हो तो त्रिभुज ABC का परिमाप ज्ञात करें।



हम जानते है कि

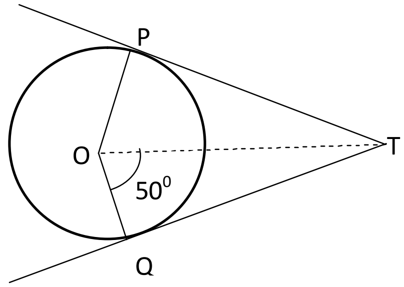
$AQ = \frac{1}{2}$ परिमाप (ABC)

परिमाप त्रिभुज ABC = $2 \times AQ$

$= 2 \times 8$

= 16 सेमी.

18. चित्र में TP और TQ, व केन्द्र वाले वृत्त की स्पर्श रेखाऐं है। यदि $\angle TOQ = 50^0$ हो तो $\angle OTP$ ज्ञात करें।



उत्तर :– चूंकी QT एक स्पर्श रेखा है।

इसलिए $\angle OQT = 90^0$

त्रिभुज OQT में

$\angle OTQ + \angle OQT + \angle QOT = 180^0$

$\angle OTQ + 90^0 + 50^0 = 180^0$

$\angle OTQ = 180^0 - 140^0$

$\angle OTQ = 40^0$

त्रिभुज POT व त्रिभुज QOT में

PT = QT {दिया है}

$\angle P = \angle Q = 90^0$

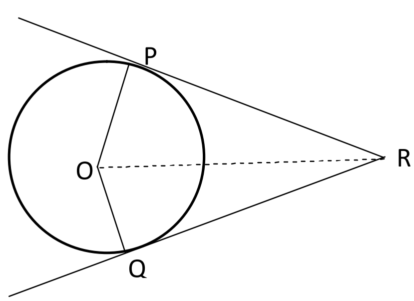
OT = OT (उभयनिष्ठ)

इसी प्रकार त्रिभुज POT ≅ त्रिभुज QOT

इसलिए $\angle OTP = \angle OTQ$

$\angle OTP = 40^0$

19. सिद्ध कीजिए कि एक बाह्रय बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाईयाँ बराबर होती है।



उत्तर :– दिया है – वृत्त का केन्द्र O है और बाह्य बिन्दु R से दो स्पर्श रेखाऐं RP व RQ है।

सिद्ध करना है – RP = RQ

उपपत्ति :– हम जानते है कि स्पर्श रेखा, वृत्त की त्रिज्या पर लम्बवत् होती है।

अतः $\angle OPR = \angle OQR = 90^0$...(1)

अब त्रिभुज OPR और OQR में

गोस्वामी मिशन – 100

$\angle OPR = \angle OQR = 90^0$ (समी.–1 से)

$OR = OR$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$OP = OQ$ (वृत्त की त्रिज्याऐं)

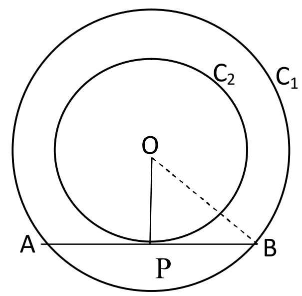
इसलिए समकोण–कर्ण–भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से

त्रिभुज $OPR \cong$ त्रिभुज OQR

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाऐं समान होंगी।

$RP = RQ$

20. सिद्ध कीजिए कि दो संकेन्द्रीय वृत्तो में बड़े वृत्त की जीवा यदि छोटे वृत्त को स्पर्श करे तो स्पर्श बिन्दु उस जीवा का समद्विभाजन करता है।



उत्तर :– दिया है – दो संकेन्द्रीय वृत्त जिनका केन्द्र O है। AB बड़े वृत्त C_1की जीवा है जो छोटे वृत्त C_2 को बिन्दु P पर स्पर्श करती है।

सिद्ध करना है – $AP = PB$

उपपत्ति :– AB, वृत्त C_2 को P पर स्पर्श करती है।

अतः $OP \perp AB$

चूंकी स्पर्श रेखा व त्रिज्या परस्पर लम्ब होती है।

चूंकी O वृत्त C_1 का भी केन्द्र है और AB वृत्त C_1 की जीवा है।

अब त्रिभुज APO व त्रिभुज BPO में

$OA = OB$ (वृत्त C_2 की त्रिज्याऐं)

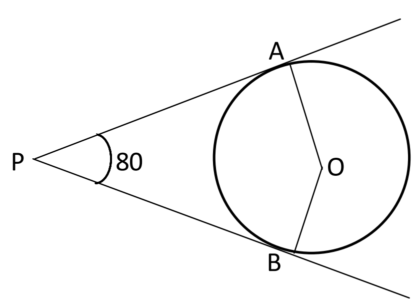
$OP = OP$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle P = \angle P = 90^0$ $(OP \perp AB)$

अतः त्रिभुज $APO \cong$ त्रिभुज BPO

सर्वांगसम त्रिभुजो के संगत भाग बराबर होते है। अतः $AP = BP$

21. दिए गये चित्र में, यदि PA व PB केन्द्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाऐं इस प्रकार है कि कोण $APB = 80^0$ हो तो कोण AOB का मान ज्ञात करें।



उत्तर :– चित्र में PA और PB केन्द्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाऐं है।

इसलिए $\angle PAO = \angle PBO = 90^0$

और $\angle APB = 80^0$

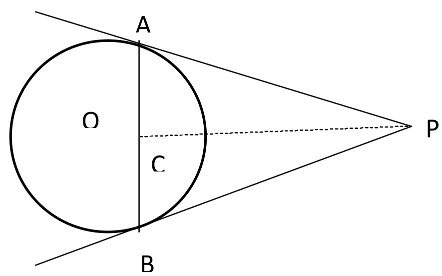
इसलिए $\angle AOB = 360 - (90+90+80)$

$\angle AOB = 360 - 260$

$\angle AOB = 100^0$

22. सिद्ध करो कि वृत्त की किसी जीवा के सिरो पर खींची गई स्पर्श रेखाऐं जीवा से समान कोण बनाती है।
उत्तर :– माना वृत्त का केन्द्र O है। AB वृत्त की जीवा है। AB के सिरे A और B पर स्पर्श रेखाऐं PA और PB खींची गई है। जो कि बिन्दु P पर काटती है।

उत्तर :–



माना OP, जीवा AB को बिन्दु C पर काटती है।

सिद्ध करना है– $\angle PAC = \angle PBC$

उपपत्ति :– त्रिभुज PCA और त्रिभुज PCB में

PA = PB (वृत्त की स्पर्श रेखाऐं)

PC = PC (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle APC = \angle BPC$

चूंकी स्पर्श रेखाऐं OP के साथ समान कोण बनाती है।

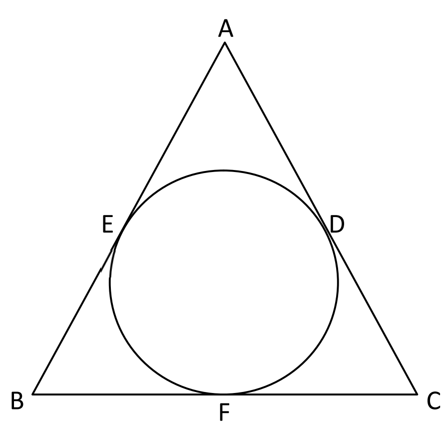
S-A-S सर्वांगसमता नियम से

त्रिभुज PCA $\cong$ त्रिभुज PCB

$\angle PAC = \angle PBC$

23. चित्र में AD = 15 सेमी., CF = 12 सेमी. और BF = 7 सेमी. तो त्रिभुज ABC की परिमिति ज्ञात करें।

उत्तर :–



चूंकी किसी बाह्‌य बिंदु से वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाओ की लम्बाई बराबर होती है।

इसलिए AD = AE = 15 सेमी-, BE = BF = 7 सेमी.

CF = CD = 12 सेमी.

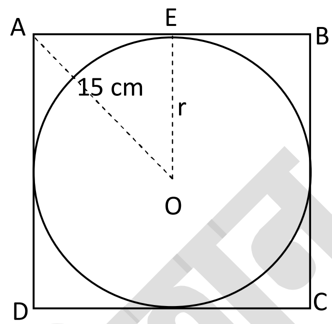
त्रिभुज ABC की परिमिति = AB+BC+CA

= (AE+BE)+(BF+CF)+(CD+DA)

= 15+7+7+12+12+15 = 68 सेमी.

24. एक O केन्द्र वाला वृत्त चतुर्भुज ABCD की चारो भुजाओं को अन्तः स्पर्श करता है। यदि AB को स्पर्श बिंदु 3:1 भागो में विभाजित करे तथा AB=12 सेमी है तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करे जबकि OA = 15 सेमी है।

उत्तर :–



प्रश्नानुसार, चतुर्भुज ABCD की चारो भुजाओं को स्पर्श करने वाला अन्तः वृत्त का केन्द्र O है। स्पर्श रेखा AB का स्पर्श बिन्दु E, AB को 3:1 में अन्तः विभाजित करता है।

इसलिए AB = 12 सेमी.

AE = $\frac{3}{4} \times 12$ = 9 सेमी.

EB = $\frac{1}{4} \times 12$ = 3 सेमी.

माना वृत्त की त्रिज्या OE = r सेमी. तथा OA = 15 सेमी. है।

चूंकी $\angle AEO = 90^0$

अतः समकोण त्रिभुज AEO में

$(OA)^2 = (OE)^2 + (AE)^2$

$15^2 = r^2 + 9^2$

$r^2 = 15^2 - 9^2$

$r^2 = 225 - 81$

$r^2 = 144$

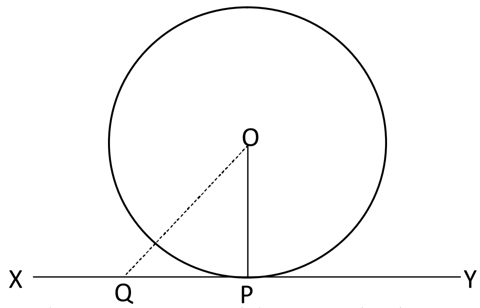
$r = \sqrt{144}$

$r = 12$

अतः वृत्त की त्रिज्या 12 सेमी. हैं।

25. वृत्त के किसी बिंन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा उस बिंदु से केन्द्र को मिलाने वाली रेखा (त्रिज्या) पर लम्ब होती है।

उत्तर :–



दिया है– O केन्द्र वाले वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा XY है और OP वृत्त की त्रिज्या है।

सिद्ध करना है – OP XY ⊥

रचना :– XY पर कोई अन्य बिन्दु Q लिया और OQ को मिलाया।

उपपत्ति :– चूंकी स्पर्श रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु स्पर्श बिन्दु को छोड़कर वृत्त के बाहर स्थित होगा। अतः $OP < OQ$

वृत्त के बाहर स्थित बिन्दु की केन्द्र से दूरी त्रिज्या से अधिक होती है।

अर्थात् OP (त्रिज्या), XY पर स्थित सभी बिन्दुओं से दूरीयों में सबसे छोटी होगी। परन्तु हम जानते है कि किसी बिन्दु की किसी सरल रेखा के सभी बिन्दुओं की दूरियों में लम्ब सबसे छोटा होता है।

अतः $OP \perp XY$

14. ज्यामितीय रचनाये

❖ **एक रेखाखंड को दिए गए अनुपात में आतंरिक विभाजन**

समान्तर रेखा व संगत कोणों पर आधारित

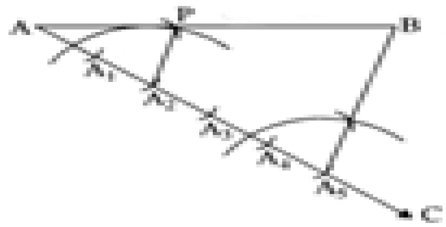
दिए गए कोण के बराबर कोण बनाना

प्रश्न :– 5 सेमी लम्बाई का रेखाखंड खींच कर उसका 2:3 में आन्तरिक विभाजन कीजिये।

उत्तर :–रचना के पद : –

1. AB =5 सेमी लम्बाई का रेखाखंड खींचा।
2. AB के बिन्दु A पर न्यून कोण (90^0 से कम कोण) बनाती हुइ रेखा AC खींची।
3. AC को दिए गए अनुपात (2:3) का योग 2+3 =5 बराबर भागों में विभाजित करके बिन्दु A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 अंकित करते है अर्थात्
   $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3\,A_4 = A_4\,A_5$
4. A_5 को बिन्दु B से मिलाया
5. A_5B के समानान्तर रेखा खींची ($\angle AA_5B=\angle AA_2P$) जो AB को P पर प्रतिच्छेद करती है इस प्रकार है :– AP:PB=2:3

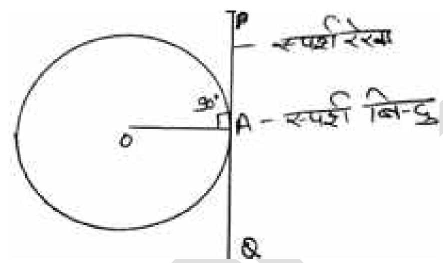
अतः AB बिन्दु P पर 2:3 में विभाजित होता है।



❖ **वृत्त की स्पर्श रेखा की रचना करना :–**

स्पर्श रेखा : – ज्यामिति में किसी समतल में स्थित किसी वक्र की स्पर्श रेखा उस सरल रेखा को कहते है, जो वक्र को केवल एक बिंदु पर स्पर्श करें।

स्पर्श बिंदु :– वह बिंदु जिस पर स्पर्श रेखा वृत्त को स्पर्श करती है।



❖ **वृत पर स्थित किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा की रचना करना :–**

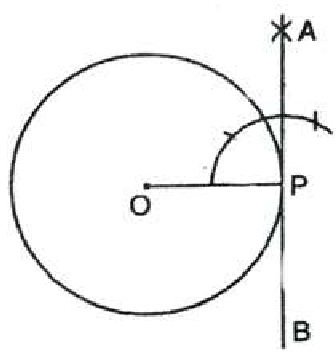
(a) वृत के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा उस बिंदु से होकर जाने वाली त्रिज्या पर लम्बवत होती है।

प्रश्न :– 3 सेमी त्रिज्या वाले वृत पर स्थित किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा की रचना कीजिए।

उत्तर :– रचना के पद :–

1. O को केंद्र मानकर 3 सेमी त्रिज्या का एक वृत खीचा
2. वृत पर एक बिंदु P लिया जिसे केंद्र O से मिलाया त्रिज्या OP की रचना हुई।
3. बिंदु P पर OP के साथ 90^0 का कोण बनती हुई रेखा APB की रचना की।

   इस प्रकार P पर AB अभीष्ट स्पर्श रेखा है।



❖ दिए गए वृत पर बाह्य बिंदु से स्पर्श रेखाओ की रचना करना :–

किसी बाह्य (बाहरी) बिंदु से वृत पर दो स्पर्श रेखाये खिंची जा सकती है तथा इन दोनों स्पर्श की लम्बाई बराबर होती है।

स्पर्शरेखा की लम्बाई (=$\sqrt{(\text{बाहरी बिंदु से केंद्र की दूरी})^2 - (\text{त्रिज्या})^2}$

प्रश्न : – एक 4 सेमी त्रिज्या का वृत्त खींचिए। उसके केंद्र O से 7 सेमी दूर स्थित बिंदु P से स्पर्श रेखा युग्म की रचना कीजिये।

उत्तर :– **रचना के पदः–**

1. O को केंद्र मानकर 4 सेमी त्रिज्या का वृत्त खींचा।
2. 0 से 7 सेमी दूरी पर बिंदु P लिया तथा OP को मिलाया।
3. OP की लंब समद्विभाजक रेखा खिंची जो OP को M पर प्रतिच्छेद करती ही।
4. M को केंद्र मानकर PM त्रिज्या का वृत्त खींचा जो O केंद्र वाले वृत्त को A व B बिन्दुओ पर कटता है।
5. A को P से मिलाया व B को P से मिलाया इस प्रकार AP व BP अभीष्ट स्पर्श रेखाएं है।
6. AP व BP की लम्बाई = $\sqrt{7^{2-}4^2}$

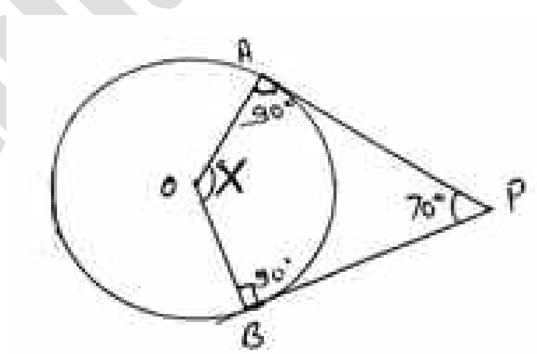
   $= \sqrt{49 - 16}$

   $= \sqrt{33}$

   = 5.7 सेमी (लगभग)

प्रश्न :– एक 4 सेमी त्रिज्या के वृत्त पर बाह्य बिंदु P से स्पर्श रेखाओ PA व P की रचना कीजिए जहाँ PA व PB के मध्य कोण 70^0 है।

उत्तर : –



∠APB = 70° (दिया गया)

∠A= ∠B = 90° (त्रिज्या व स्पर्श रेखा के मध्य कोण)

चतुर्भुज AOBP में

∠AOB + ∠A +∠B +∠D = 360°

$X+90^0+90^0+70^0= 360^0$

$X = 360^0 - 250^0$

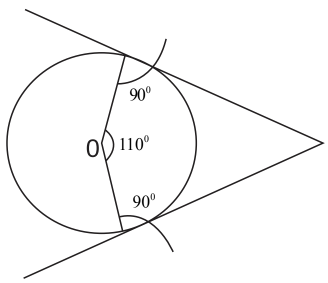
$X = 110^0$

रचना के पद :–

1. सर्व प्रथम O को केंद्र मानकर 4 सेमी त्रिज्या का वृत्त बनाया।
2. वृत्त पर बिंदु A लिया OA को मिलाया।
3. OA के बिंदु O पर $\angle AOB = 110^0$ बनाया।
4. OA व OB के बिंदु A व B पर 90^0 का कोण बनाया जिनका प्रतिच्छेदित बिंदु P प्राप्त हुआ।

   $\angle APB$ को मापने पर $\angle APB = 70^0$ प्राप्त होता है।

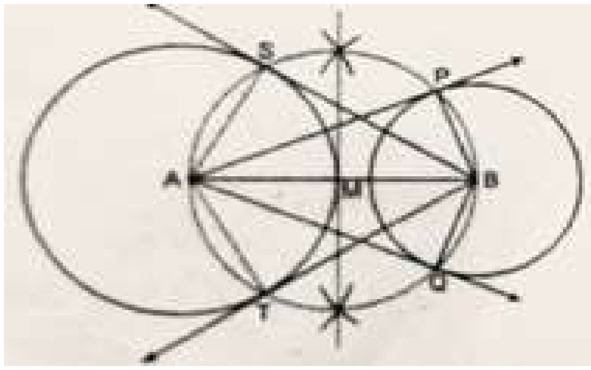
   इस प्रकार अभीष्ट स्पर्श रेखाओ PA व PB की रचना हुई।



प्रश्न :– 9 सेमी लांब एक रेखाखंड AB खींचिए। A को केंद्र मानकर 4 सेमी त्रिज्या का वृत्त तथा B को केंद्र मानकर 2 सेमी त्रिज्या का वृत्त खींचिए। प्रत्येक वृत्त पर दुसरे वृत्त केंद्र से स्पर्श रेखा युग्म की रचना करो।

उत्तर :– रचना के पद :–

1. सर्वप्रथम AB= 9 सेमी का रेखाखंड खींचा
2. A को केंद्र मानकर 4 सेमी तथा B को केंद्र मानकर 2 सेमी त्रिज्या का वृत खींचा।
3. AB की लंब समद्विभाजक रेखा खेंची जो AB को M पर प्रतिच्छेदित करती है।
4. M को केंद्र मानकर MA या MB(MB=MA) त्रिज्या का वृत्त बनाया।
5. यहाँ वृत B केंद्र वाले वृत को P व Q पर तथा A केंद्र वाले वृत को T व S पर प्रतिच्छेदित करता है।
6. A को क्रमशः P व Q से मिलाने पर B केंद्र वाले वृत्त की स्पर्श रेखाओं PA व QA की रचना हुई।
7. B को T व S से मिलाने पर B केंद्र वाले वृत की स्पर्श रेखाओं BS व BT की रचना हुई।



❖ त्रिभुज के परिगत वृत्त की रचना :–

परिगत वृत्त – त्रिभुज के तीनो शीर्षों से गुजरने वाला वृत्त, परिगत वृत्त कहलाता है।

परिकेंद्र –त्रिभुज की तीनो भुजाओं लंब समद्विभाजको का प्रतिच्छेद बिंदु, परिकेंद्र होता है।

प्रश्न :– Δ PQR की रचना कीजिये जिसमे PQ=6 सेमी ,QR=5 सेमी व कोण Q=60 डिग्री है। इस त्रिभुज के परिगत वृत्त की रचना कीजिये।

उत्तर :– रचना के पद :–

(a) ΔPQR की रचना हेतु PQ= 6 सेमी लम्बाई का रेखाखंड खींचा।

(b) PQ के बिंदु Q पर $\angle$PQX = 60 बनाया।

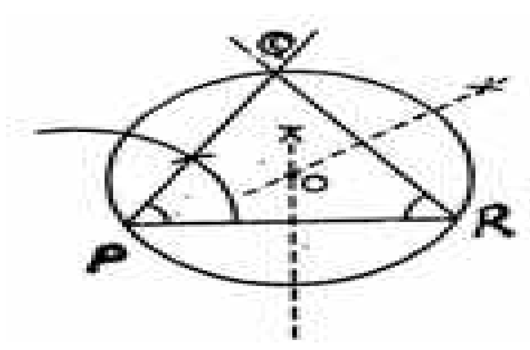
(c) QX पर Q को केंद्र मानकर QR= 5 सेमी त्रिज्या का चाप लगाया। जिससे QX पर R बिंदु प्राप्त हुआ।

(d) R को P से मिलाया इस प्रकार ΔPQR की रचना की।

(e) ΔPQR की कोई भी दो भुजाओं का लंब समद्विभाजक खींचेगे।

(f) लंब समद्विभाजको का प्रतिच्छेद बिंदु O है जो की परिकेंद्र है।

(g) O को केंद्र मानकर ΔPQR के किसी एक शीर्ष (यहाँ P) से परिकेंद्र की दूरी OP त्रिज्या का वृत्त बने जो की ΔPQR के तीनो शीर्षों से गुजरता है द्य इस प्रकार अभीष्ट परिगत वृत्त की रचना हुई।



❖ त्रिभुज के अंतर्गत वृत्त (अतः वृत्त) की रचना :.–

अन्तर्गत वृत्त – त्रिभुज की तीनो भुजाओ को स्पर्श करने वाला वृत्त।

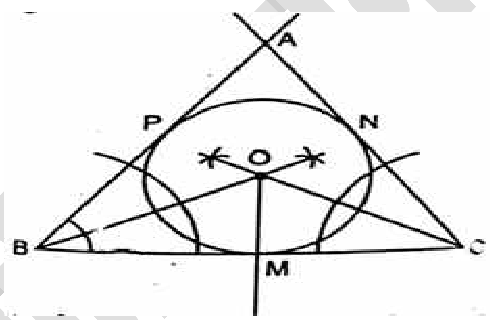
अंतः केंद्र –त्रिभुज के सभी अंतः कोणों के समद्विभाजको का संगामी बिंदु अंतः केंद्र कहलाता है।

प्रश्न : – ΔABC के अंतर्गत वृत्त की रचना करो यदि BC= 4 सेमी $\angle B = 60^0$ व $\angle C = 50^0$ है।

उत्तर :–रचना के पद :–

1. ΔABC की रचना हेतु BC= 4 सेमी लम्बाई का रेखाखंड खींचा।
2. BC के बिंदु B पर$\angle B = 60^0$ व बिंदु C पर $\angle C = 50^0$ बनाया। इनका प्रतिच्छेदित बिंदु A प्राप्त हुआ। इस प्रकार ΔABC की रचना की।
3. ΔABC के किन्ही दो कोणों ($\angle B$ व $\angle C$) के समद्विभाजक खींचे।
4. इन समद्विभाजको का प्रतिच्छेद बिंदु O जो अंतः केंद्र है।
5. O से भुजा (BC पर लंब खींचा) यह लंब रेखा BC को M पर प्रतिच्छेदित करती है।
6. O को केंद्र मानकर OM त्रिज्या का वृत्त बने जो ΔABC की सभी भुजाओ को स्पर्श करता है।

इस प्रकार अभीष्ट अंतर्गत वृत्त की रचना की।



महत्वपूर्ण प्रश्न :

1. 6 सेमी भुजा वाले समबाहु त्रिभुज की रचना करो तथा इसके परिगत वृत्त की रचना करो।
2. एक 7 सेमी लम्बाई का रेखाखंड च्फ खींचो P को केंद्र मानकर 3 सेमी त्रिज्या का वृत्त खींचो। इस वृत्त पर Q से स्पर्श रेखा की रचना करो।
3. 10 सेमी लम्बाई का रेखाखंड खींचो। इसे 4:5 में विभाजित करो।
4. एक 5 सेमी त्रिज्या का वृत्त बनाकर केंद्र O पर OA तथा OB त्रिज्याएँ जो परस्पर 120^0 का कोण बनाती है, खींचिये। बिंदु A व B पर स्पर्श रेखाएं खींचिए

इकाई–7 (क्षेत्रमिति)

प्रश्न का प्रकार	अंक भार
लघुत्रात्तमक टाइप (1)–2	2 × **2 =4**
लघुत्रात्तमक टाइप (2)–2	2 × **3 =6**
योग	**10**

15 वृत्त की परिधि एवम् क्षेत्रफल (लघुतरात्मक प्रश्न – 2)

महत्वपूर्ण सूत्र 1. वृत्त की परिधि $= 2\pi r$

2. वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

3. दो सकेन्द्रीय वृत्तो द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल $= \pi(R^2 - r^2)$

4. चाप की लम्बाई जो केन्द्र पर θ कोण बनाती है। $= \frac{\pi r\theta}{180°}$

5. r त्रिज्या वाले वृत्त के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल जो केन्द्र पर θ कोण अन्तरित करता है। $= \frac{\pi r^2\theta}{360°}$

6. r त्रिज्या वाले वृत्त के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल जिसके चाप की लम्बाई L हो $= \frac{1}{2} \times L \times r$

7. लघु वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2\theta}{360°} - \frac{1}{2} \times r^2\, Sin\theta$

8. दीर्घ वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल – लघु वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल

9. छायांकित भाग का क्षेत्रफल = सम्पूर्ण आकृति का क्षेत्रफल – बिना छायांकित भाग का क्षेत्रफल

महत्वपूर्ण तथ्य :–

(1) घड़ी की सुई को त्रिज्या के तुल्य मानते है।

(2) अर्द्धवृत्त का परिमाप $= \pi r + 2r$

(3) अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2}{2}$

(4) घड़ी के मिनट की सूई 1 मिनट में $6°$ का कोण अन्तरित करती है।

(5) घड़ी के घण्टे की सूई 1 घण्टे में 30° व 1 मिनट में $(\frac{1}{2})^{\circ}$ का कोण अन्तरित करती है।

प्रश्न. 1 एक वृत्ताकार प्लेट का क्षेत्रफल 154 वर्ग सेमी है। इसकी परिधि ज्ञात कीजिए।

हल :– माना वृत्ताकार प्लेट की त्रिज्या r है। दिया है कि वृताकार प्लेट का क्षेत्रफल $= 154$ वर्ग सेमी है। $\pi r^2 = 154 \rightarrow \frac{22}{7} r^2 = 154 \rightarrow r^2 = \frac{154\times7}{22} = 49 \rightarrow r = \sqrt{49} = 7cm$

अब वृत्ताकार प्लेट की परिधि $= 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 7 = 44$ सेमी

प्रश्न. 2 एक वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि 44 सेमी है ।

हल :– माना वृत्ताकार प्लेट की त्रिज्या r है।

प्रश्नानुसार $2\pi r = 44 \rightarrow \frac{22}{7} \times r = 44 \rightarrow r \frac{44\times7}{2\times22} = 7$ सेमी

चतुर्थांश का क्षेत्रफल $\frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = \frac{154}{4} = 38.5$ सेमी^{2}

प्रश्न. 3 100 चक्कर में एक स्कूटर का पहिया 88 मीटर की दूरी तय करता है। इस पहिये की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल :– माना पहिये की त्रिज्या r है

100 चक्कर में पहिये द्वारा तय दूरी = 8800 सेमी. (चूकि 1 मीटर = 100 सेमी.)

1 चक्कर में पहिये द्वारा तय दूरी $= 88cm \rightarrow 2\pi r = 88 \rightarrow 2 \times \frac{22}{7} \times r = 88 \rightarrow r = \frac{88 \times 7}{2 \times 22} =$ 14 सेमी.

प्रश्न. 4 एक वृत्त के चाप की लम्बाई 5π है तथा त्रिज्य खण्ड 20π वर्ग सेमी0 के क्षेत्रफल से घिरा है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल :– माना कि वृत की त्रिज्या r है तथा चाप की लम्बाई L है।

प्रश्नानुसार त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times L \times r = 20\pi \rightarrow \frac{1}{2} \times 5\pi \times r = 20\pi \rightarrow r = \frac{20\pi \times 2}{5\pi} = 8$ सेमी.

प्रश्न. 5 एक घड़ी के घण्टे की सूई 5 सेमी. लम्बी है 7 मिनट में इस सूई द्वारा बनाये गये लघु त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :– घण्टे की सूई की लम्बाई $(r) = 5cm$ घण्टे की सूई द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण $(\theta) = \frac{1}{2} \times 7 = \frac{7^\circ}{2}$

अंतरित लघु त्रिज्या खण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2 \theta}{360} = \frac{22 \times 5 \times 5 \times 7}{7 \times 360 \times 2} = 0.764$ सेमी^{2}

महत्वपूर्ण प्रश्न :–

प्रश्न. 1 एक घोड़े को 28 मीटर लम्बी रस्सी द्वारा एक घास के मैदान में खंभे से बांधा गया है घोड़े द्वारा चरे जा सकने वाले भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

प्रश्न. 2 एक वर्ग की भुजा $10cm$ हो, तो इसके परिवृत व अन्तः वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न. 3 एक 42 मीटर व्यास के वृत्ताकार घास के मैदान के बाहर चारों ओर 3.5 मीटर चौड़ा रास्ता है। रास्ते में 4 रू. प्रति वर्ग मीटर की दर से कंकड़ बिछवाने का खर्च ज्ञात कीजिए।

प्रश्न. 4 एक वृत्त की त्रिज्या 14 सेमी. तथा केन्द्र पर अंतरित कोण 90° है संगत लघुवृत्तखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न. 5 7 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त में कोण 120° के संगत दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न. 6 एक वृत्त की त्रिज्या 10.5 सेमी. है और त्रिज्यखण्ड का कोण 45° है वृत्त के लघुत्रिज्यखण्ड के चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

प्रश्न. 7 एक घड़ी के मिनट की सूई 10 सेमी लम्बी है। प्रातः 8:00 बजे से 8:25 बजे तक मिनट की सूई द्वारा तय किया गया क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न. 8 एक वृत्त की परिधि एक वर्ग के परिमाप के बराबर हे। यदि वर्ग का क्षेत्रफल 484 वर्ग मीटर है तो वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल 1– घोड़े द्वारा चरे जा सकने वाले भाग का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 28 \times 28 = 2464$ वर्ग मीटर।

हल 2 – व्यास $AC = \sqrt{(10)^2 + (10)^2} = \sqrt{100 + 100} = \sqrt{200} = \sqrt{100 \times 2} = 10\sqrt{2}, r = 5\sqrt{2}$

परिवृत का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = \frac{1100}{7} = 157$ वर्ग सेमी. लगभग

व्यास = वर्ग की भुजा $= 10$ सेमी. $r = \frac{10}{2} = 5$ सेमी.

अन्तःवृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 5 \times 5 = \frac{550}{7} = 78.5$ वर्ग सेमी.

हल 3 – रास्ते का क्षेत्रफल $= \pi(R^2 - r^2) \frac{22}{7}[(24.5)^2 - (21)^2] = \frac{22}{7} \times 45.5 \times 3.5 = 500.5$ मी^{2}

रास्ते में कंकड़ बिछवाने का खर्च $= 500.5 \times 4 = 2002$ रूपये

हल 4 – लघु वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2 \theta}{360°} - \frac{1}{2} \times r^2 \, Sin\theta = \frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 - \frac{1}{2} \times 14 \times 14 \times Sin 90 \rightarrow 154 - 98 = 56$ वर्ग सेमी.

हल 5 – $r = 7$ सेमी $\theta = 120°$ संगत दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2 (360° - \theta)}{360°} = \frac{\frac{22}{7} \times 7 \times 7 (360° - 120°)}{360°} = \frac{154 \times 240}{360} = 102.66$ सेमी^{2}

हल 6 – लघु त्रिज्यखण्ड के चाप की लम्बाई $= \frac{\pi r \theta}{180°} = \frac{\frac{22}{7} \times 10.5 \times 45°}{180°} = 8.25 cm$

हल 7 – वृत्त की त्रिज्या $r =$ घड़ी की सूई की लम्बाई $= 10$ सेमी. अन्तरित कोण $\theta = 25 \times 6° = 150°$

त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\pi r^2 \theta}{360°} = \frac{\frac{22}{7} \times 10 \times 10 \times 150}{360°} = 130.95$ वर्ग सेमी.

हल 8 ' माना कि वृत्त की त्रिज्या r तथा वर्ग की भुजा x है। दिया है चुकि वृत का परिमाप = वर्ग का परिमाप

$2\pi r = 4 \times x \quad \rightarrow \quad \frac{r}{x} = \frac{4}{2 \times \pi} = \frac{2 \times 7}{22} = \frac{7}{11}$

वृत्त का क्षेत्रफल : वर्ग का क्षेत्रफल

$= \frac{\pi r^2}{x^2} = \frac{22}{7} \times (\frac{r}{x})^2 = \frac{22}{7} \times (\frac{7}{11}) \times \frac{7}{11} = \frac{14}{11} = 14:11$

16–पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

महत्वपूर्ण सूत्र –

1. घनाभ का सम्पूर्ण पृष्टीय क्षेत्रफल $= \boldsymbol{2(lb + bh + hl)}$, $\boldsymbol{l}$ लम्बाई, $\boldsymbol{b}$ चौड़ाई, $\boldsymbol{h}$ ऊचाई
2. घनाभ का आयतन $= \boldsymbol{lbh} =$ आधार का क्षेत्रफल × ऊचाई
3. घन का सम्पूर्ण पृष्टीय क्षेत्रफल $= \boldsymbol{6a^2} (\boldsymbol{a} \rightarrow$भुजा)
4. घनाभ के विकर्ण की लम्बाई $= \sqrt{\boldsymbol{l^2 + b^2 + h^2}}$
5. घन के विकर्ण की लंबाई $= \sqrt{\boldsymbol{3}} \times$ भुजा $= \sqrt{\boldsymbol{3}}\, \boldsymbol{a}$
6. बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \boldsymbol{2\pi rh}$
7. बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \boldsymbol{2\pi r(h + r)}$
8. बेलन का आयतन $\boldsymbol{\pi r^2 h}$
9. शंकु की तिर्यक ऊचाई $\boldsymbol{l} = \sqrt{\boldsymbol{h^2 + r^2}}$

10 शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \boldsymbol{\pi rl}$

11. शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \boldsymbol{\pi r(l + r)}$
12. शंकु का आयतन $= \boldsymbol{\frac{1}{3} \pi r^2 h}$
13. गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \boldsymbol{4\pi r^2}$

14. गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

15. अर्द्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

16. अर्द्धगोले का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$

17. अर्द्धगोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

1 घनमीटर = 1000 लीटर, 1 लीटर = 1000 घन सेमी, 1 आर = 100 वर्ग मीटर।

प्रश्न. 1 एक घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 864 वर्ग सेमी है। घन की भुजा ज्ञात कीजिए।

हल :– घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 6 भुजा^{2} = 864 →भुजा^{2} = 144 भुजा = $\sqrt{144} = 12$ सेमी.

प्रश्न. 2 एक सन्दूक की माप 50 सेमी × 36 सेमी. × 25 सेमी. है इस सन्दूक का कवर बनाने के लिए कितने वर्ग सेमी कपड़े की आवश्यकता होगी।

हल :– संदूक के कवर का क्षेत्रफल = संदूक का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $2(lb + bh + hl) = 2(50 \times 36 + 36 \times 25 + 25 \times 50) = 7900$ वर्ग सेमी.

प्रश्न. 3 एक बेलन के सिरे का क्षेत्रफल 154 वर्ग सेमी. है तथा इसकी ऊचाई 21 सेमी है बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल :– बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊचाई = 154 × 21 = 3234 घन सेमी

प्रश्न 4 – एक बेलनाकार बर्तन में 30800 cm^3 पानी भरा जा सकता है यदि वर्तन की भीतरी त्रिज्या $14cm$ है तो उसका भीतरी वक्र पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल :– बेलनाकार वर्तन का आयतन $= \pi r^2 h = 30800$

$$\frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times h = 30800$$

$$h = \frac{30800 \times 7}{22 \times 14 \times 14} = 50cm$$

बेलनाकार बर्तन के भीतरी वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 50 = 4400cm^2$

प्रश्न. 6 ' एक गोले का आयतन 38808 घन सेमी. है तो गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :– गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3 = 38808$ घन सेमी

$$r^3 = \frac{38808 \times 3 \times 7}{22 \times 4} = 9261$$

$r = 21$ सेमी.

अब गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$

$$= 5544cm^2$$

प्रश्न. 7 यदि 11 सेमी × 3.5 सेमी × 2.5 सेमी मोम के एक घनाभ से 2.8 सेमी व्यास की एक मोमबत्ती बनाई जाती है। मोमबत्ती की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल :– मोमबत्ती का आयतन = घनाभाकार मोम का आयतन

$$\pi r^2 h = lbh$$

$$\frac{22}{7} \times 1.4 \times 1.4 \times H = 11 \times 3.5 \times 2.5$$

$$H = \frac{11 \times 3.5 \times 2.5 \times 7}{22 \times 1.4 \times 1.4} = 15.6cm$$

प्रश्न. 8 – एक शंकु की तिर्यक ऊचाई और त्रिज्या का अनुपात 7 : 4 है। यदि इसके वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल 792 वर्ग सेमी हो, तो इसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल :– माना शंकु की तिरछी ऊचाई l तथा आधार की त्रिज्या r है, तब

प्रश्नानुसार $l : r = 7 : 4$

या $l = \frac{7}{4}r \ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$

शंकु का वक्र पृष्ठ $= \pi rl = 792$

$\frac{22}{7} \times r\left(\frac{7}{4}r\right) = 792$ सेमी

$r^2 = \frac{792\times2}{11} = 144$

$r = \sqrt{144} = 12$ सेमी.

प्रश्न. 9 20 मीटर गहरा और 7 मीटर व्यास का एक कुँआ खोदा गया। इससे निकाली मिट्टी से 22 मीटर× 14 मीटर माप का एक चबूतरा बनाया गया। चबूतरे की ऊचाई ज्ञात कीजिए।

हल :– कुएँ की गहराई $(h) = 20$ मीटर

तथा व्यास $= 7$ मीटर

अतः कुएँ की त्रिज्या$= \frac{7}{2}$ मीटर

तथा इस कुएँ से निकली मिट्टी से चबूतरा बनाया जाता है इस चबूतरे की लम्बाई $(L) = 22$ मीटर, चौड़ाई $(B) = 14$ मीटर तथा माना ऊँचाई (H) है।

अतः चबूतरे का आयतन = कुएँ का आयतन

$LBH = \pi r^2 h$

$22 \times 14 \times H = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 20$

$H = \frac{11\times7\times10}{22\times14} = 2.5$ मीटर

अतः चबूतरे की ऊँचाई 2.5 मीटर होगी।

महत्वपूर्ण प्रश्न :–

1. एक सीसे के ठोस आयत फलक की माप 66 सेमी× 42 सेमी × 21 सेमी है इसको पिघलाकर इससे 4.2 सेमी व्यास की कितनी गोलिया बनाई जा सकती है।

हल :– माना कि गोलियों की संख्या n

$n \times \frac{4}{3}\pi R^3 = LBH$

$n \times \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (2.1)^3 = 66 \times 42 \times 21$

$n = \frac{66\times42\times21\times3\times7}{4\times22\times2.1\times2.1\times2.1} = 1500$ गोलिया

2. एक खोखला गोल सेल 2 सेमी मोटा है, इसकी बाहरी त्रिज्या 8 सेमी है तो इसमे लगी धातु का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल :– $R = 8$ सेमी. $r = 8 - 2 = 6$

गोलिये कोश का आयतन $= \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} [(8)^3 - (6)^3]$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} (512 - 216)$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 296 = \frac{26048}{21} = 1240.38$ घन सेमी

प्रश्न. 3 9 मीटर ऊचे शंकु के आकार के टेट के आधार की परिधि 44 मीटर है इसके अन्दर की वायु का आयतन ज्ञात करो।

हल :– $2\pi r = 44$

$2 \times \frac{22}{7} \times r = 44$

$r = \frac{44 \times 7}{2 \times 22} = 7$ मीटर

इस टेंट के अंदर वायु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 9 = 462$ घन मीटर

प्रश्न. 4 एक ठोस अर्द्धगोले का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 462 वर्ग सेमी है इसका आयतन ज्ञात कीजिए।

हल :– माना कि अर्द्धगोले की त्रिज्या r है।

प्रश्नानुसार $3\pi r^2 = 462$

$3 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 462$

$r^2 = \frac{462 \times 7}{3 \times 22} = 49$

$r = \sqrt{49} = 7$ सेमी

अर्द्धगोले का आयतन $= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7 = 718.66$ घन सेमी

प्रश्न. 5 दो घनों जिसमें से प्रत्येक का आयतन 27 सेमीं है, तो इसके संलग्न फलकों को मिलाकर एक ठोस घनाभ बनाया जाता है प्राप्त ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :– घन का आयतन $= (\text{भुजा})^3 = 27$ घन सेमी

भुजा = 3 सेमी

दो घनो के संलग्न फलको को मिलाने पर बने घनाभ की लम्बाई $= 2 \times 3 = 6$ सेमी, चौड़ाई = 3 सेमी, ऊँचाई = 3 सेमी.

घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(lb + bh + hl)$

$= 2(6 \times 3 + 3 \times 3 + 3 \times 6)$

$= 2(18 + 9 + 18) = 90$ वर्ग सेमी.

प्रश्न. 6 एक घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई का अनुपात 5 : 3 : 2 है, यदि घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 558 वर्ग सेमी है, तो उसके कोरों की माप ज्ञात कीजिए।

हल :– माना घनाभ की लम्बाई $= 5x$

चौड़ाई $= 3x$

ऊँचाई $= 2x$

घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(lb + bh + hl)$

$$= 2(5x \times 3x + 3x \times 2x + 2x \times 5x)$$

$$= 2(15x^2 + 6x^2 + 10x^2) = 558$$

$$= 2(31x^2) = 558$$

$$= 62x^2 = 558$$

$$x^2 = \frac{558}{62} = 9$$

$$x = \sqrt{9} = 3$$

अतः लम्बाई $= 5 \times 3 = 15$ सेमी, चौड़ाई $= 3 \times 3 = 9$ सेमी ऊँचाई $= 2 \times 3 = 6$ सेमी।

इकाई - सांख्यिकी(ch- 17)

प्रश्न का प्रकार	**अंक भार**
निबंधात्मक	06
योग	06

- **<u>समान्तर मध्य ($\bar{x}$)</u>**

सामान्तर मध्य $= \frac{\text{आंकड़ो का योग}}{\text{आंकड़ो की संख्या}}$

(a) व्यक्तिगत श्रेणी का माध्य- $\bar{x} = \frac{\sum Xi}{n}$

$\sum Xi = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + X_n$ n= आंकड़ो की संख्या

(b) अवर्गीकृत बटन => $\bar{x} = \frac{\sum fixi}{\sum Fi}$

(c) कल्पित माध्य द्वारा => $\bar{x} = a + \frac{\sum fi.di}{\sum fi}$

जहाँ a= कल्पित माध्य (चर x का मध्य मान)

(d) पद विचलन विधि => $\bar{x} = a + \frac{\sum fi.Ui}{\sum fi} X h$

जहाँ, a= कल्पित माध्य

$Ui = \frac{di}{h} = \frac{Xi - A}{h}$, h=वर्ग का अंतराल

(1) प्रथम 10 प्राकृत संख्याओ का समान्तर माध्य ज्ञात करो |

प्रथम 10 प्राकृत संख्याऐ = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 (व्यक्तिगत श्रेणी)

समान्तर माध्य $= \frac{\sum Xi}{n} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}{10}$

$\bar{x} = \frac{55}{10} = 5.5$

(2) एक कारखाने में 50 अधिकारियों का दैनिक वेतन निम्न प्रकार है - (अवर्गीकृत बंटन)

वेतन (रु में) x	400	450	500	550	600
अधिकारियों की संख्या	12	13	7	10	8

उत्तर -

Xi	fi	f_ix_i

श्रेष्ठता मिशन - 100

400	12	4800
450	13	5850
500	7	3500
550	10	5500
600	8	4800
	$\sum Fi=50$	$\sum Fi.Xi=24450$

$$\overline{x} = \frac{\sum fi.xi}{\sum fi} = \frac{24450}{50} = 489$$

(3) यदि निम्न बटन का माध्य 8 हो तो P का मान ज्ञात करो

x	3	5	7	9	11	13
f	6	8	15	P	8	4

उत्तर -

X_i	3	5	7	9	11	13	
f_i	6	8	15	P	8	4	$\sum fi = 41 + P$
$f_i.X_i$	18	40	105	9P	88	52	$\sum fi.xi = 303+9P$

$\sum fi = 41 + P$

$\sum fi.xi = 303+9P$

समान्तर माध्य $\overline{x} = \frac{\sum fi.xi}{\sum fi}$

$8 = \frac{303+9P}{41+P}$

$8(41+P) = 303+9P$

$328+8P = 303+9P$

$328-303 = 9P-8P$

$25 = P$

(4) यदि 5,7,9,x का समान्तर माध्य 9 हो तो x का मान ज्ञात करो |

उत्तर - समान्तर माध्य = $\frac{\sum Xi}{n}$ = $\frac{\text{आंकड़ो का योग}}{\text{आंकड़ो की संख्या}}$

$9 = \frac{5+7+9+x}{4}$

$9X4 = 21+x$

36-21= x

15=x

(5) निम्न बरम्बारता बंटन का समान्तर माध्य ज्ञात करो |

वर्ग अंतराल	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
बरम्बारता	13	17	23	16	11

उत्तर - वर्गान्तारो का मध्यमान (x) = $\frac{\text{निम्न सीमा+उच्च सीमा}}{2}$

वर्ग का अंतराल	मध्यमान (X_i)	f_i	$f_i.X_i$
0-5	$\frac{0+5}{2}$=2.5	13	32.5
5-10	$\frac{05+10}{2}$=7.5	17	127.5
10-15	$\frac{10+15}{2}$=12.5	23	287.5
15-20	$\frac{15+20}{2}$=17.5	16	280.0
20-25	$\frac{20+25}{2}$=२२.5	11	247.5
		$\sum fi = 80$	$\sum fi.Xi = 975$

समान्तर माध्य $\bar{x} = \frac{\sum fi.Xi}{\sum fi}$

$$= \frac{975}{80} = 12.19$$

(6) यदि X1,X2,............,Xn का माध्य $\bar{x}$ हो तो mX1,mX2,..................,mXn का माध्य ज्ञात करो |

उत्तर - $\bar{x} = \frac{X1+X2+\cdots.........+Xn}{n}$

अभीष्ट माध्य = $\frac{mX1+mX2+\cdots.........+mXn}{n} = \frac{m(X1+X2+\cdots.........+Xn)}{n}$

अभीष्ट माध्य = $m\bar{x}$

(7)यदि 5 संख्याओं का माध्य 15 है| प्रत्येक संख्या को 4 गुणा करने पर नया माध्य क्या होगा |

उत्तर- $\bar{x} = \frac{X1+X2+\cdots.........+Xn}{n}$=15

अभीष्ट माध्य= $\frac{4X1+4X2+\cdots.........+4Xn}{n} = \frac{4(X1+X2+\cdots.........+Xn)}{n}$ =4x15 =60

(8)निम्न बारम्बारता बंटन का कल्पित माध्य से समान्तरमाध्य ज्ञात करो |

वर्ग अंतराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बरम्बारता	7	10	15	8	10

उत्तर-

वर्ग का अंतराल	मध्यमान (X_i)	f_i	$d_i=x_i$-a	$f_i.d_i$
0-10	5	7	-20	-140
10-20	15	10	-10	-100
20-30	25	15	0	0

30-40	35	8	10	80
40-50	45	10	20	200
		$\sum f\text{i} = 50$		$\sum f\text{i.di} = 40$

कल्पित माध्य=a=चर x के मध्य का मान=25

समान्तरमाध्य = $a + \frac{\sum \text{fi.di}}{\sum \text{fi}}$

$$\bar{x} = 25 + \frac{40}{50} = 25+0.8 = 25.8$$

(9)निम्न बारम्बारता बंटन का समान्तरमाध्य पदविचलन विधि से ज्ञात करो |

वर्ग	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
बरम्बारता	10	25	28	12	10	15

उत्तर-

वर्ग	मध्यमान (x_i)	f_i	d_i=x_i-a	$U_i=\frac{d_i}{h}$	$f_i.U_i$
40-50	45	10	-20	-2	-20
50-60	55	25	-10	-1	-25
60-70	65	28	0	0	0
70-80	75	12	10	1	12
80-90	85	10	20	2	20
90-100	95	15	30	3	45
		$\sum f\text{i} = 100$			$\sum \text{fi.Ui} = 32$

कल्पित माध्य= a = 65

h= वर्गअन्तराल =10

समान्तरमाध्य = $a + \frac{\sum \text{fi.Ui}}{\sum \text{fi}} \times h$

$$\bar{x} = 65 + \frac{32}{100} x10 = 65+3.2 = 68.2$$

⁎माध्यक -

(a) व्यक्तिगत श्रेणी का माध्यक -

1.चर x के n पदों को आरोही व अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाये|

2. निम्न सूत्र से माध्यक ज्ञात किया जायेगा-

$$\text{माध्यक} = \begin{cases} \left\{\frac{n+1}{2}\right\} \text{वां पद/ (मध्य पद) यदि} n \text{ विषम है} \\ \left[\frac{\left\{\left(\frac{n}{2}\right)\text{वां पद} + \left\{\frac{n}{2}+1\right\}\text{वां पद}\right\}}{2}\right] \text{/(मध्य दो पदों का औसत)यदि nसम है तब} \end{cases}$$

(1)निम्न आंकड़ो का माध्यक ज्ञात करो|

25,34,31,23,22,26,35,28,20,32

उत्तर - आंकड़ो को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर

20,22,23,25,26,28,31,32,34,35 n= 10 सम

$$\text{माध्यक} = \left[\frac{\left\{\left(\frac{n}{2}\right)\text{वां पद} + \left\{\frac{n}{2}+1\right\}\text{वां पद}\right\}}{2}\right] = \text{मध्य दो पदों का औसत}$$

$$= \frac{\text{5वां पद+6 वां पद}}{2} = \frac{26+28}{2} = 27$$

(2) यदि निम्न आंकड़े आरोही क्रम में व्यवस्थित है,तथा इनका माध्यक 7 है| x का मान ज्ञात करो|

3,4,5,x,8,9,10

उत्तर- n= 7 विषम

माध्यक = मध्य पद

7 = 4 वां पद

7 = x

*(b) अवर्गीकृत बारम्बारता बटन का माध्यक -

1. संचयी बारम्बारता सरणी बनाइये

2. $\frac{N}{2} = \frac{\sum f}{2}$ ज्ञात करिये

3. $\frac{N}{2}$ से ठीक अधिक संचयी बारम्बारता के संगत चर का मान ही अभीष्ट माध्यक है|

(3) निम्न बारम्बारता बंटन का माध्यक ज्ञात करो -

x	2	4	6	8	10	12	14
f	2	4	8	5	3	7	2

उत्तर-

x	f	संचयी बारम्बारता(cf)
2	2	2
4	4	2+4=6
6	8	6+8=14
8	5	14+5=19
10	3	19+3=22
12	7	22+7=29
14	2	29+2=31
	$\sum f$ =31	

$\frac{N}{2} = \frac{\sum f}{2} = \frac{31}{2} = 15.5$

15.5 से ठीक अधिक संचयी बारम्बारता के संगत चर x = 8

अभीष्ट माध्यक =8

(c)वर्गीकृत बारम्बारता बंटन का माध्यक -

1. संचयी बारम्बारता सरणी बनाइये

2. $\frac{N}{2} = \frac{\sum f}{2}$ ज्ञात करिये

3. $\frac{N}{2}$ से ठीक अधिक संचयी बारम्बारता के संगत वर्ग माध्यक वर्ग है|

4. माध्यक = $l + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times h$

l= माध्यक वर्ग की निम्न सीमा, f= माध्यक वर्ग की बारम्बारता,

h= माध्यक वर्ग का अंतराल, cf= माध्यक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की संचयी बारम्बारता

(4) निम्न बारम्बारता बंटन का माध्यक ज्ञात करो-

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बरम्बारता	4	28	42	26	10

उत्तर-

वर्ग	f_i	cf
0-10	4	4
10-20	28	32 cf
20-30	42 f	74
30-40	26	100
40-50	10	110
	$\sum f_i = 110$	

$\frac{N}{2} = \frac{\sum f}{2} = \frac{110}{2} = 55$

55 से ठीक अधिक संचयी बारम्बारता 74 के संगत वर्ग 20-30

माध्यक वर्ग= 20-30

l=20, h=10, f=42, cf=32, $\frac{N}{2}$ =55

माध्यक = $l + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times h$

माध्यक = $20 + \frac{55-32}{42} \times 10$

माध्यक = $20 + \frac{23}{42} \times 10$

माध्यक $= 20 + \frac{230}{42} = 20 + 5.48 = 25.48$

(5) निम्न बारम्बारता बंटन का माध्यक ज्ञात करो-

वर्ग	118-126	127-135	136-144	145-153	154-162	163-171	172-180
बरम्बारता	3	5	9	12	5	4	2

उत्तर- दिये गये बंटन में वर्ग सतत(लगातार) नहीं हैं| वर्गों को सतत बनाने हेतु (निम्न सीमा-0.5 व उच्च सीमा+0.5) करेगे |

वर्ग	सतत वर्ग	Fi	cf
118-126	117.5-126.5	3	3
127-135	126.5-135.5	5	8
136-144	135.5-144.5	9	17cf
145-153	<u>144.5-153.5</u>	12 f	29
154-162	153.5-162.5	5	34
163-171	162.5-171.5	4	38
172-180	171.5-180.5	2	40
		$\sum$ Fi =40	

$\frac{N}{2} = \frac{\sum f}{2} = \frac{40}{2} = 20$

20 से ठीक अधिक संचयी बारम्बारता 29 के संगत वर्ग 144.5-153.5

माध्यक वर्ग= 144.5-153.5

l= 144.5, h=9,f=12,cf=17, $\frac{N}{2} = 20$

माध्यक = $l + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times h$

माध्यक = $144.5 + \frac{20-17}{12} \times 9$

माध्यक = $144.5 + \frac{3}{12} \times 9 = 144.5 + \frac{27}{12} = 144.5 + 2.25 = 146.75$

*बहुलक-

किसी श्रेणी का वह मूल्य जिसकी बारम्बारता सर्वाधिक होती है , बहुलक कहलाता है|

(a) वर्गीकृत बारम्बारता बंटन का बहुलक -

1. सर्वाधिक बारम्बारता वाला वर्ग बहुलक वर्ग होगा |
2. बहुलक सूत्र = $l + \frac{f1-f0}{2f1-f0-f2} \times h$

l = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा, f_1= बहुलक वर्ग की बारम्बारता,

h= बहुलक वर्ग का अंतराल, f_0= बहुलक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की बारम्बारता

f_2= बहुलक वर्ग से ठीक बाद वाले वर्ग की बारम्बारता

(1) निम्न बारम्बारता बंटन का बहुलक ज्ञात करो-

वर्ग	10-20	20-30	<u>30-40</u>	40-50	50-60
बरम्बारता	6	20 f_0	25 f_1	13 f_2	5

उत्तर- सर्वाधिक बारम्बारता वाला वर्ग बहुलक वर्ग= 30-40

बहुलक सूत्र = $l + \frac{f1-f0}{2f1-f0-f2} \times h$

$l=30,\ h=10,\ f_1=25,\ f_0=20,\ f_2=13$

बहुलक = $30+\frac{25-20}{2x25-20-13} x\ 10=30+\frac{5}{50-33} x\ 10 = 30+\frac{50}{17}$ =30 +2.94 =32.94

*अभ्यासार्थ प्रश्न-

(1) निम्न बारम्बारता बंटन का बहुलक ज्ञात करो-

वर्ग	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25
बरम्बारता	7	5	12	10	6

(2)निम्न बारम्बारता बंटन का माध्यक तथा कल्पित माध्य से समान्तरमाध्य ज्ञात करो |

वर्ग	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
बरम्बारता	12	26	20	14	28

इकाई - प्रायिकता ch- 18)

प्रश्न का प्रकार	**अंक भार**
अति लघुत्तरात्मक(01)	01
लघु (SA-2) (01)	03
योग	04

- किसी घटना को घटित होने पर संभावना का संख्यात्मक रूप ही प्रायिकता है |

  प्रायिकता = $\frac{\text{घटना के अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल संभावित परिणाम}}$

- P(A)- घटना A के घटित होने की प्रायिकता

  $P(\bar{A})$/ P (NOT A) – घटना A के घटित नहीं होने की प्रायिकता
- P(A) = 1-P(not A) या 1- $P(\bar{A})$
- $0 \leq P(A) \leq 1$

(1) किसी अभिप्रयोग की सभी प्रारंभिक घटनाओ की प्रयिकताओं का योग क्या होता है ?

उत्तर - $P(E_1)+ P(E_2)+ P(E_3)+ P(E_4)+$..........................$+ P(E_n) = 1$

(2) किसी निश्चित घटना की प्रायिकता क्या होगी ?

उत्तर - 1

(3) किसी असंभव घटना की प्रायिकता क्या होगी ?

उत्तर - शुन्य (0)

(4) एक सिक्के को एक बार उछालने पर चित (H) आने की प्रायिकता क्या होगी ?

उत्तर - एक सिक्के को एक बार उछालने पर संभावित परिणाम = चित (H) , पट (T)

कुल परिणाम = 02

P(H) = चित आने की प्रायिकता = $\frac{\text{घटना के अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल संभावित परिणाम}} = \frac{1}{2}$

(5) यदि P(E)= 0.092 है तो P(not E) ज्ञात करो |

उत्तर - P(not E)= 1-P(E)

= 1-0.092

= 0.908

- **पासे से सम्बंधित प्रश्न -**
- एक पासे को n बार/ n पासो को एक बार उछालने पर कुल संभव परिणाम = 6^n
- एक पासे को एक बार उछालने पर कुल संभव परिणाम = 1,2,3,4,5,6

कुल परिणाम - 06

सम संख्या - 2,4,6 विषम संख्या - 1,3,5 अभाज्य संख्या - 2,3,5

(6) एक पासे को एक बार उछालने पर सम संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात करो |

उत्तर - कुल परिणाम -06

सम संख्या = 2,4,6

सम संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता =3/6= ½

(7) एक पासे को एक बार उछालने पर अभाज्य संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता क्या होगी ?

उत्तर - कुल परिणाम =06

अभाज्य संख्या - 2,3,5

अभाज्य संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता = 3/6 = ½

(8) एक बार पासे को उछालने पर 4 से छोटी संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता क्या होगी ?

उत्तर - कुल परिणाम = 06

4 से छोटी संख्याऐ =1,2,3

4 से छोटी संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता = 3/6 = ½

(9) एक पासे को दो बार या दो पासो को एक साथ उछालने पर संभावित परिणाम लिखो |

उत्तर -

अंक/ अंक	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

(10) एक पासे को दो बार उछालने पर संभावित कुल परिणाम कितने होंगे ?

उत्तर - 6^2 =36

(11) एक पासे को दो बार उछालने पर इसकी क्या प्रायिकता होगी कि प्राप्त संख्याऐ-

(a) योग 10 हो (b) योग 6 से कम हो

(c) युग्मक(द्विक) संख्याऐ हो (d) 4 एक बार भी न आये

उत्तर - कुल परिणाम = 36

(a) योग 10 प्राप्त हो इस घटना के अनुकूल परिणाम

= (6,4) (5,5) (4,6) कुल = 03

प्राप्त संख्याओ का योग होने की प्रायिकता = 03/36 = 1/12

(b) योग 6 से कम हो इस घटना के अनुकूल परिणाम

= (1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (4,1) (3,1) (2,1) (2,2) (2,3) (3,2)

कोरगांव मिशन - 100

कुल - 10

घटना प्राप्त संख्याओ का योग 6 से कम होने की प्रायिकता = 10/36

(c) युग्मक संख्याऐ (1,1) (2,2) (3,3) (4,4) (5,5) (6,6)

कुल = 06

युग्मक संख्याऐ प्राप्त होने की प्रायिकता = 06/36 = 1/6

(d) 4 एक भी बार न आये घटना के अनुकूल परिणाम

= (1,1) (1,2) (1,3) (1,5) (1,6) (2,1) (2,2) (2,3) (2,5) (2,6) (3,1) (3,2) (3,3) (3,5) (3,6) (5,1) (5,2) (5,3) (5,5) (5,6) (6,1) (6,2) (6,3) (6,5) (6,6)

कुल - 25

घटना 4 एक भी बार न आने की प्रायिकता = 25/36

(12) एक सिक्के को दो बार उछालने पर कुल परिणाम लिखो

(एक सिक्के को n बार/ n सिक्को को एक बार उछालने पर कुल परिणाम= 2^n)

उत्तर - 2^2 =4

(13) एक सिक्के को दो बार उछालने पर सभी संभावित परिणाम लिखो |

उत्तर - चित (H) पट (T)

परिणाम - HH, HT, TH, TT

(14) एक सिक्के को दो बार उछालने पर दोनों बार पट (T) आने की प्रायिकता ज्ञात करो |

उत्तर - कुल परिणाम - 04

दोनों बार पट (T) आने में अनुकूल परिणाम = TT

कुल = 01

अभीष्ट प्रयिकता = ¼

(15) एक सिक्के को तीन बार उछालने पर संभावित कुल परिणाम कितने होंगे ?

उत्तर - 2^3 = 2X2X2 =8

(16) 1 से 20 तक की प्राकृत संख्याओ में से एक संख्या का चयन किया जाता है | प्रायिकता ज्ञात करो कि -

(a) संख्या अभाज्य हो (b) संख्या 5 से भाज्य हो

उत्तर - कुल परिणाम 20

(a) अभाज्य संख्या आने के अनुकूल परिणाम = 2,3,5,7,11,13,17,19

कुल = 08

अभाज्य संख्य आने की प्रायिकता = 08/20 = 2/5

(b) 5 से भाज्य आने के अनुकूल परिणाम = 5,10,15,20

घटना के अनुकूल परिणाम = 04

घटना संख्या 5 से भाज्य आने की प्रायिकता = 4/20 =1/5

(17) एक लीप वर्ष में 53 रविवार होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए |

उत्तर - लीप वर्ष में 366 दिन होते है |

52 पूर्ण सप्ताह अर्थात 52X7 =364 दिन

शेष दिन - 02

इन दो दिनों की सम्भावनाऐ = रविवार व सोमवार, सोमवार व मंगलवार , मंगलवार व बुधवार, बुधवार व गुरूवार , गुरूवार व शुक्रवार , शुक्रवार व शनिवार, शनिवार व रविवार

गोरधारीशिक्षा - 100

अत: कुल परिणाम = 07

इन 7 स्थितियों में रविवार आने के अनुकूल परिणाम - 02

लीप वर्ष में 53 रविवार माने की प्रायिकता = 2/7

(18) एक अलीप वर्ष में केवल 52 सोमवार आने की प्रायिकता ज्ञात करो |

उत्तर - अलीप वर्ष में 365 दिन होते है

52 पूर्ण सप्ताह अर्थात 364 दिन जिनमे 52 सोमवार होंगे

शेष दिन - 01

01 दिन हेतु संभव स्थितियां - सोम , मंगल , बुध , गुरु , शुक्र , शनि , रवि

कुल परिणाम = 07

इन स्थितियों में सोमवार न आने के संभव परिणाम = 06

अलीप वर्ष में केवल 52 सोमवार आने की प्रयिकता = 6/7

(19) एक थैले में 5 लाल 4 सफ़ेद गेंद है | इस थैले में से एक गेंद याद्दछया निकाली जाती है तो गेंद के लाल होने की प्रायिकता ज्ञात करो |

उत्तर - लाल गेंद = 05

सफ़ेद गेंद = 04

कुल गेंद = 09

कुल संभावित परिणाम = 09

लाल गेंद प्राप्त होने की प्रायिकता = 05/09

(20) A तथा B मित्र है | उनके जन्म दिवस की प्रायिकता ज्ञात करो -

(a) जब जन्म दिवस सामान हो | (b) जब जन्म दिवस भिन्न हो |

उत्तर - एक वर्ष में 365 दिन होते है

कुल संभावित परिणाम = 365

(a) जब A व B के जन्म दिवस सामान हो तो अनुकूल परिणाम = 1

प्रायिकता (A व B के जन्म दिवस समान हो) = 1/365

(b) जब A व B के जन्म दिवस भिन्न हो तो अनुकूल परिणाम = 364

प्रायिकता (A व B के जन्म दिवस भिन्न हो) = 364/365

- **<u>ताश के पत्तो (कार्ड) से सम्बंधित प्रश्न -</u>**

ताश की गड्डी में कुल पत्ते (कार्ड) = 52

*लाल रंग के पत्ते = 26 *काले रंग के पत्ते - 26

*मुख (फेस)/तस्वीर कार्ड = 12(4+4+4)

*बादशाह = 04 बेगम = 04 गुलाम - 04 इक्का - 04

*शेष 2,3,4,5,.........,10 तक प्रत्येक के 4 पत्ते

*हुकुम के पत्ते = 13(काले) , ईंट के पत्ते = 13 (लाल)

पान के पत्ते = 13 (लाल) , चीड़ी के पत्ते = 13 (काले)

(21) ताश की गड्डी में से एक पत्ता निकालने पर काले रंग का पत्ता प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात करो |

उत्तर - कुल परिणाम = 52

काले रंग का पत्ता आने के अनुकूल परिणाम =26

काले रंग का पत्ता आने की प्रायिकता = 26/52 = 1/2

(22) ताश के 52 पत्तो की एक भली भांति फेंटी गड्डी में से एक पत्ता निकाला गया है | निकले गए पत्ते की प्रायिकता ज्ञात करो यदि -

(a) पत्ता ईंट का हो (b) पत्ता पान का न हो

(c) पत्ता फेस वाला हो (d) इक्का न हो

(e) पत्ता लाल रंग के बादशाह का हो (f) काले रंग की तस्वीर वाला पत्ता हो

उत्तर - कुल परिणाम - 52

(a) ईंट के पत्ते = 13

ईंट का पत्ता प्राप्त होने की प्रायिकता = 13/52= 1/4

(b) पत्ता पान का न होने के अनुकूल परिणाम = 52-13 =39

निकला गया पत्ता पान का न होने की प्रायिकता = 39/52 = ¾

(c) पत्ता फेस (तस्वीर) वाला होने के अनुकूल परिणाम = 12

पत्ता फेस वाला होने की प्रायिकता = 12/52 =3/13

(d) इक्का न होने के अनुकूल परिणाम = 52-4 = 48

निकाला गया पत्ता इक्का न होने की प्रायिकता = 48/52 = 12/13

(e) पत्ता लाल रंग का बादशाह होने के अनुकूल परिणाम = 02

निकाला गया पत्ता लाल रंग के बादशाह होने की प्रायिकता - 02/52 =1/26

(f) निकाला गया पत्ता काले रंग का तस्वीर वाला होने के अनुकूल परिणाम = 06 (काले फेस कार्ड)

निकला गया पत्ता काले रंग का तस्वीर वाला होने की प्रायिकता = 6/52 = 3/26

- **अभ्यासार्थ प्रश्न (Activity Questions) -**

(1) एक पासे को एक बार उछालने पर विषम संख्या आने की प्रायिकता लिखो |

(2) यदि P(E)= 3/5 है तो पP($\bar{E}$) ज्ञात करो |

(3) एक पासे को एक बार फेंकने पर 3 से छोटी अभाज्य संख्या आने की प्रायिकता ज्ञात करो |

(4) दो भिन्न पासो को एक साथ उछालने पर प्राप्त सभी संभावित परिणाम लिखो तथा दोनों पासो पर प्राप्त संख्याओ का गुणनफल 4 आने की प्रायिकता ज्ञात करो |

(5) एक बक्से में कार्ड है जिन पर 1 से 100 तक की संख्याऐ अंकित है | बक्से में से यादृच्छाया एक कार्ड निकाला गया | प्रायिकता ज्ञात करो कि निकाले गए कार्ड पर प्राप्त संख्या -

(a) पूर्ण वर्ग हो (b) 6 से भाज्य हो

(6) एक सिक्के को दो बार उछालने पर एक भी बार H न आने की प्रायिकता ज्ञात करो |

(7) एक सिक्के को 3 बार उछालने पर सभी संभावित परिणाम लिखो तथा तीनो बार H आने की प्रायिकता ज्ञात करो |

(8) एक डिब्बे में 20 ख़राब पेन व 130 अच्छे पेन है , यदि एक पेन यादृच्छाया निकला गया है तो पेन के ख़राब होने की प्रायिकता ज्ञात करो |

(9) एक अलीप वर्ष में 53 सोमवार आने की प्रायिकता ज्ञात करो

इकाई–9 (सड़क सुरक्षा शिक्षा)

प्रश्नावली–19

प्रश्न का प्रकार	अंक भार
अतिलघुत्रात्तमक प्रश्न (2)	**2 × 1 =2**
लघुत्रात्तमक प्रश्न (1)	**1 × 2 =2**
योग	**4**

P.U.C. का पूरा नाम (Pollution Under Control) पॉल्यूशन अण्डर कन्ट्रोल

- रूकने की दूरी = प्रतिक्रिया + अवरोध दूरी

1 P.U.C. का क्या उपयोग है?

हलः– यह वाहनों को प्रदुषण स्तर पर निर्धारण हेतु दिया जाता है। यदि प्रदुषण का स्तर मानक स्तर से अधिक होता है तब वाहन मालिक के विरूद्ध उचित कानूनी कार्यवाही होती है। P.U,C. प्रत्येक वाहन के लिए अनिवार्य है। इसे बढ़ावा देने के लिये सरकार ने L.P.G. तथा C.N.G को पेट्रोल के स्थान पर प्रयोग करने की योजना शुरू की ळें

2 यदि मिताली अपनी कार से पहली, दूसरी, तीसरी व चौथी सिग्नल लाईट को क्रमशः 3, 8, 13, 18 सैकण्ड में पार करती है तो 20 वीं सिग्नल लाईट इसी क्रम में कितने समय में पार करेगी।

हलः– यह A.P. आधारित प्रश्न है। जहां $a = 3\, sec.$ (पहली सिग्नल लाईट को पार करने मं लगा समय) $n = 20$

सार्वअन्तर $(d) = a_2 - a_1 = 8 - 3 = 5\, sec.$

अतः $a_n = a + (n-1)d$

$a_{20} = 3 + (20-1)5$

$= 3 + 19 \times 5$

$= 3 + 95$

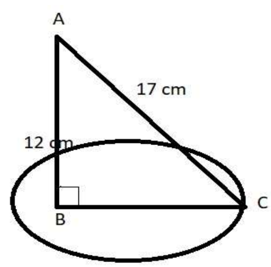
$a_{20} = 98$ अतः 20 वीं सिग्नल लाईट को पार करने में लगा समय $= 98\, sec.$

- CCTV का पूरा नाम – क्लोज्ड सक्रिट टेलिविजन
- यातायात संकेतों में लाल बत्ती की आकृति – अष्ट भुजाकार
- CCTV कैमरा के उपयोग

  (i) इसके द्वारा चारों ओर का दृश्य दिखाई देता है, जिससे कोई भी व्यक्ति यातायात नियमों का उल्लंघन करता है तो वह जल्दी पकड़ में आ जाता है एवं उल्लंघन करने से डरता है।

  (ii) सड़क दुर्घटना होने पर CCTV द्वारा पता लग जाने से तुरन्त रोगी वाहन सेवा (Ambulalnce) को भेजा जा सकता है।

3 एक 12 मीटर ऊँचे पोलपर यातायात नियंत्रण के लिए CCTV कैमरा लगा है, पोल के शीर्ष से 17 मीटर दृष्टि रेखा तक यातायात देख सकता है। पोल के कैमरे द्वारा कितना क्षेत्रफल यातायात देखा जा सकता है।



समकोण त्रिभुज ABC मे

$\angle ABC = 90°$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ (बोधायन प्रमेय मे)

$17^2 = 12^2 + BC^2$

$BC^2 = 17^2 - 12^2$

$= 289 - 144$

$BC^2 = 145$

$BC = \sqrt{145}$

कैमरे द्वारा पोल के चारों ओर का दर्शनीय = वृत का क्षेत्रफल

$= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times (\sqrt{145})^2$

$= \frac{22}{7} \times 145$

$= 455.71\, Mtr^2$

4. वाहनोंमें चालान कटने के दो कारण लिखों?

शेखावाटी मिशन – 100

मार्गदर्शक एवं प्रेरणा स्रोतः–

डॉ. महेन्द्र कुमार
सेवा निवृत संयुक्त निदेशक
स्कूल शिक्षा चूरू सम्भाग, चूरू

श्री सुरेन्द्र सिंह गौड़
संयुक्त निदेशक
स्कूल शिक्षा चूरू सम्भाग, चूरू

श्री घनश्याम जाट
मुख्य जिला शिक्षा अधिकारी
झुंझुनू

श्री संपतराम बारूपाल
मुख्य जिला शिक्षा अधिकारी
चूरू

संभाग स्तरीय परीक्षा परिणाम उन्नयन समिति

श्री ओम प्रकाश फगेड़िया
अति. जि.शि.अ. कार्यालय संयुक्त निदेशक
स्कूल शिक्षा चूरू सम्भाग, चूरू

श्रीमति बबीता ढ़ाका
सहायक निदेशक
कार्यालय मुख्य जि.शि. अधिकारी
झुंझुनू

श्री राकेश कुमार तेतरवाल
सहायक निदेशक
कार्यालय मुख्य जि.शि. अधिकारी
सीकर

श्री नरेश बिस्सु
सहायक निदेशक
कार्यालय मुख्य जि.शि. अधिकारी
चूरू

संकलन, सहयोग एवं सुझावः–

श्री महेद्रसिंह बड़सरा
अति. जि.शि.अ. कार्यालय संयुक्त निदेशक
स्कूल शिक्षा चूरू सम्भाग, चूरू

श्री अमर सिंह
जिला शिक्षा अधिकारी (मुख्यालय)
माध्यमिक शिक्षा, झुंझुनू

श्री मुकेश कुमार मेहता
जिला शिक्षा अधिकारी (मुख्यालय)
माध्यमिक शिक्षा, सीकर

श्री रमेश पुनियाँ
अति. जिला परियोजना समन्वयक,
समसा, चूरू

श्री रिछपाल सिंह
अति. जिला परियोजना समन्वयक,
समसा, सीकर

श्री सुभाष चन्द्र मीणा
अति. जिला परियोजना समन्वयक,
समसा, झुंझुनू

श्री सांवरमल गहनोलिया
शैक्षिक प्रकोष्ठ प्रभारी, चूरू

श्री हरदयालसिंह
शैक्षिक प्रकोष्ठ प्रभारी, सीकर

श्री कमलेश तेतरवाल
शैक्षिक प्रकोष्ठ प्रभारी,झुंझुनू

श्री महेन्द्र सारण, प्रधानाचार्य
राउमावि भोजाण राजगढ चूरू

श्री त्रिलोक चन्द्र, वरिष्ठ अध्यापक
राउमावि, आबसर, चूरू

श्री शिशुपाल छिरंग, प्र..अ.
राबाउप्रावि नाकरासर, चूरू

श्री प्रमोद कुमार सैनी
कनिष्ठ सहायक
समसा, चूरू

श्री पुरूषोतम मीणा, सप्रअ
कार्यालय संयुक्त निदेशक
स्कूल शिक्षा चूरू सम्भाग, चूरू

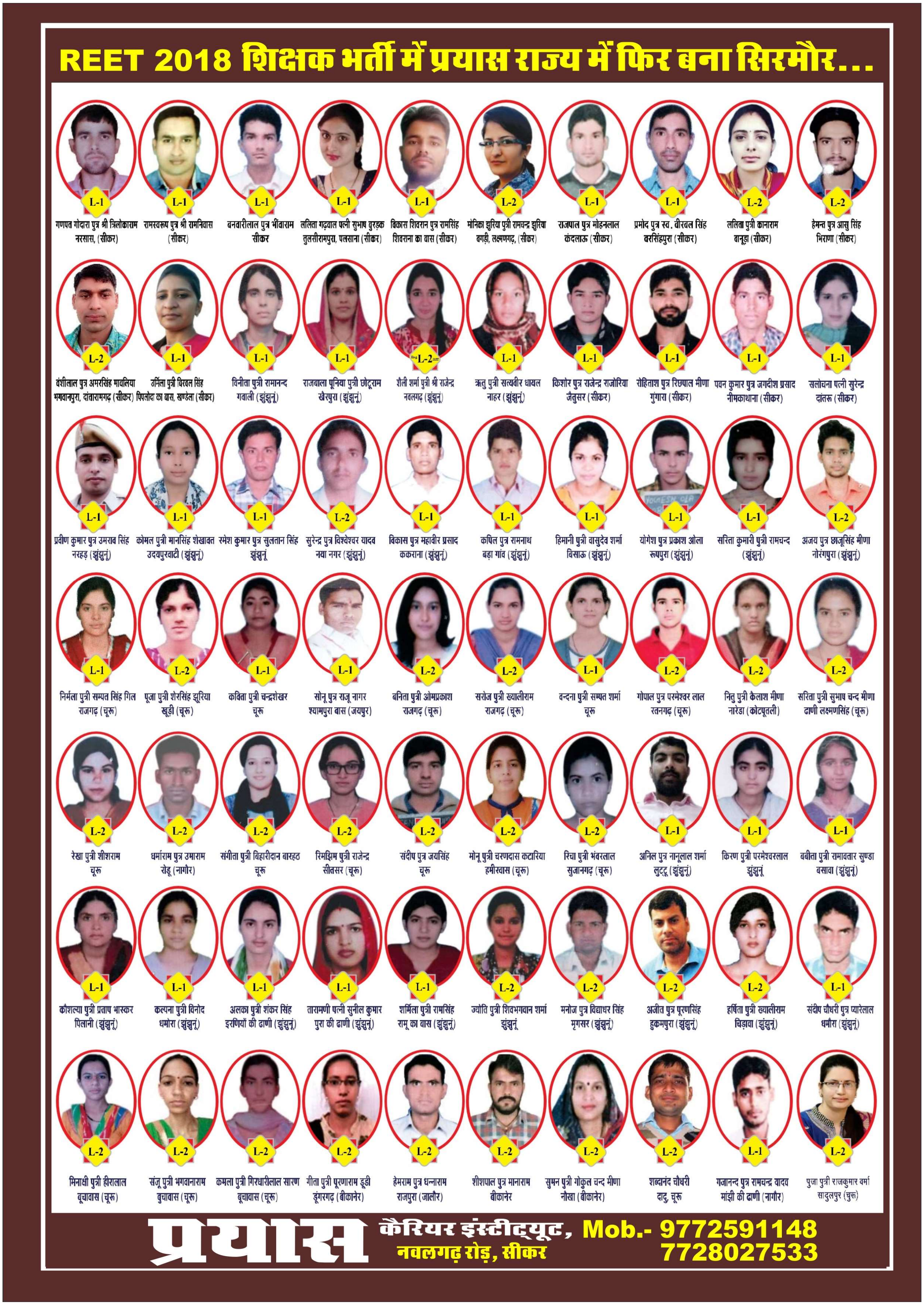
श्री रूकमानन्द, वरिष्ठ सहायक
कार्यालय संयुक्त निदेशक
स्कूल शिक्षा चूरू सम्भाग, चूरू

संरक्षक

श्री रामकरण फगेड़िया
सेवा निवृत प्रधानाचार्य

श्री मुकन्दाराम नेहरा
सेवा निवृत प्रधानाचार्य

कार्यालय :– संयुक्त निदेशक स्कूल शिक्षा, चूरू संभाग, चूरू (राजस्थान)


REET 2018 शिक्षक भर्ती में प्रयास राज्य में फिर बना सिरमौर...
L-1 गणपत गोदारा पुत्र श्री त्रिलोकाराम नरसास, (सीकर)
L-1 रामस्वरूप पुत्र श्री रामनिवास (सीकर)
L-1 बनवारीलाल पुत्र भींवाराम सीकर
L-1 ललिता गढ़वाल पत्नी सुभाष बुरड़क तुलसीरामपुरा, पलसाना (सीकर)
L-1 विकास शिवरान पुत्र रामसिंह शिवराना का बास (सीकर)
L-2 मोनिका झुरिया पुत्री रामचन्द्र झुरिया बगड़ी, लक्ष्मणगढ़, (सीकर)
L-1 राजपाल पुत्र मोहनलाल कंदलाऊ (सीकर)
L-1 प्रमोद पुत्र स्व. बीरबल सिंह बरसिंहपुरा (सीकर)
L-2 ललिता पुत्री कानाराम बानूड़ा (सीकर)
L-2 हेमन्त पुत्र आसु सिंह भिराणा (सीकर)
L-2 वंशीलाल पुत्र अमरसिंह मावलिया भगवानपुरा, दांतारामगढ़ (सीकर)
L-1 उर्मिला पुत्री बिरवल सिंह पिपलोदा का बास, खण्डेला (सीकर)
L-1 विनीता पुत्री रामानन्द गवाली (झुंझुनूं)
L-1 राजबाला पूनिया पुत्री छोटूराम खेरपुरा (झुंझुनूं)
Eng L-2 SST शैली शर्मा पुत्री श्री राजेन्द्र नवलगढ़ (झुंझुनूं)
L-1 ऋतु पुत्री सत्यवीर धायल नाहर (झुंझुनूं)
L-1 किशोर पुत्र राजेन्द्र राजोरिया जैतुसर (सीकर)
L-1 रोहिताश पुत्र रिछपाल मीणा गुंगारा (सीकर)
L-1 पवन कुमार पुत्र जगदीश प्रसाद नीमकाथाना (सीकर)
L-1 सलोचना पत्नी सुरेन्द्र दांतरू (सीकर)
L-1 प्रवीण कुमार पुत्र उमराव सिंह नरहड़ (झुंझुनूं)
L-1 कोमल पुत्री मानसिंह शेखावत उदयपुरवाटी (झुंझुनूं)
L-1 रमेश कुमार पुत्र सुलतान सिंह झुंझुनूं
L-2 सुरेन्द्र पुत्र विश्वेश्वर यादव नया नगर (झुंझुनूं)
L-1 विकास पुत्र महावीर प्रसाद ककराना (झुंझुनूं)
L-1 कपिल पुत्र रामनाथ बड़ा गांव (झुंझुनूं)
L-1 हिमानी पुत्री वासुदेव शर्मा बिसाऊ (झुंझुनूं)
L-1 योगेश पुत्र प्रकाश ओला रूपपुरा (झुंझुनूं)
L-1 सरिता कुमारी पुत्री रामचन्द (झुंझुनूं)
L-2 अजय पुत्र छाजूसिंह मीणा नोरंगपुरा (झुंझुनूं)
L-1 निर्मला पुत्री सम्पत सिंह गिल राजगढ़ (चूरू)
L-2 पूजा पुत्री शेरसिंह झूरिया खूड़ी (चूरू)
L-1 कविता पुत्री चन्द्रशेखर चूरू
L-1 सोनू पुत्र राजू नागर श्यामपुरा बास (जयपुर)
L-2 बनिता पुत्री ओमप्रकाश राजगढ़ (चूरू)
L-2 सरोज पुत्री ख्यालीराम राजगढ़ (चूरू)
L-1 वन्दना पुत्री सम्पत शर्मा चूरू
L-2 गोपाल पुत्र परमेश्वर लाल रतनगढ़ (चूरू)
L-2 नितु पुत्री कैलाश मीणा नारेडा (कोटपूतली)
L-2 सरिता पुत्री सुभाष चन्द मीणा ढाणी लक्ष्मणसिंह (चूरू)
L-2 रेखा पुत्री शीशराम चूरू
L-2 धर्माराम पुत्र उमाराम रोड़ू (नागौर)
L-2 संगीता पुत्री बिहारीदान बारहठ चूरू
L-2 रिमझिम पुत्री राजेन्द्र सीतसर (चूरू)
L-2 संदीप पुत्र जयसिंह चूरू
L-2 मोनू पुत्री चरणदास कटारिया हमीरवास (चूरू)
L-2 रिचा पुत्री भंवरलाल सुजानगढ़ (चूरू)
L-1 अनिल पुत्र नानूलाल शर्मा लुटटू (झुंझुनूं)
L-1 किरण पुत्री परमेश्वरलाल झुंझुनूं
L-1 बबीता पुत्री रामावतार सुण्डा बसावा (झुंझुनूं)
L-1 कौशल्या पुत्री प्रताप भास्कर पिलानी (झुंझुनूं)
L-1 कल्पना पुत्री विनोद धमोरा (झुंझुनूं)
L-1 अलका पुत्री शंकर सिंह इरणियों की ढाणी (झुंझुनूं)
L-1 तारामणी पत्नी सुनील कुमार पुरा की ढाणी (झुंझुनूं)
L-1 शर्मिला पुत्री रामसिंह रामू का बास (झुंझुनूं)
L-2 ज्योति पुत्री शिवभगवान शर्मा झुंझुनूं
L-2 मनोज पुत्र विद्याधर सिंह मृगसर (झुंझुनूं)
L-2 अजीत पुत्र पूरणसिंह हुकमपुरा (झुंझुनूं)
L-2 हर्षिता पुत्री ख्यालीराम चिड़ावा (झुंझुनूं)
L-1 संदीप चौधरी पुत्र प्यारेलाल धमौरा (झुंझुनूं)
L-2 मिनाक्षी पुत्री हीरालाल बूचावास (चूरू)
L-2 संजू पुत्री भगवानाराम बुचावास (चूरू)
L-2 कमला पुत्री गिरधारीलाल सारण बूचावास (चूरू)
L-2 गीता पुत्री पूरणाराम डूडी डूंगरगढ़ (बीकानेर)
L-2 हेमराम पुत्र धन्नाराम राजपुरा (जालौर)
L-2 शीशपाल पुत्र मानाराम बीकानेर
L-2 सुमन पुत्री गोकुल चन्द मीणा नौखा (बीकानेर)
L-2 शब्दानंद चौधरी दादु, चूरू
L-1 गजानन्द पुत्र रामचन्द्र यादव मांझी की ढाणी (नागौर)
L-2 पुजा पुत्री राजकुमार वर्मा सादुलपुर (चुरू)
प्रयास
कैरियर इंस्टीट्यूट,
नवलगढ़ रोड़, सीकर
Mob.- 9772591148
7728027533

This document was created with Win2PDF available at http://www.win2pdf.com.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.
This page will not be added after purchasing Win2PDF.