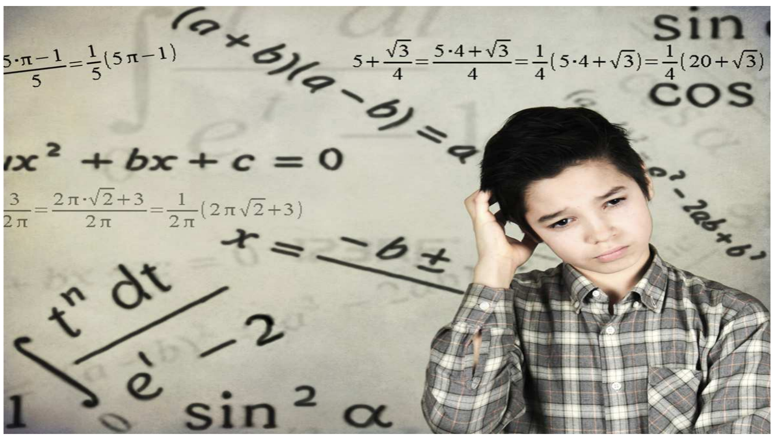
कार्यालय उप निदेशक (माध्यमिक) शिक्षा विभाग, जोधपुर मण्डल जोधपुर

प्रयास—2017

विषय—गणित

(पाठ्य सामग्री)

कक्षा—10



माध्यमिक परीक्षा परिणाम में गुणात्मक एवं मात्रात्मक सुधार हेतु अभिनव कार्ययोजना के तहत निर्मित शैक्षिक सामग्री

कार्यशाला : प्रयास – 2017

(दिनांकः–27.01.2017)

पाठ्य सामग्री – गणित विषय

क्र.स.	पाठ संख्या	पाठ का नाम	पृष्ठ संख्या
1	1	संख्या पद्धति	3–6
2	2	बहुपद	7–8
3	3	युगपत समीकरण	9–12
4	4	द्विघात समीकरण	13–16
5	5	सामान्तर श्रेढ़ी	17 – 21
6	6	त्रिभुज	22– 24
7	7	निर्देशांक ज्यामिती	25 – 28
8	8	त्रिकोणमिति	29 – 31
9	9	ऊंचाई व दूरी	32 – 35
10	10	वृत्त	36 – 37
11	11	रचनाएँ	38 – 40
12	12	वृत्त से सम्बधित क्षेत्रफल	41 – 43
13	13	पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन	44 – 48
14	14	सांख्यिकी	49 – 51
15	15	प्रायिकता	52 – 55
16	16	सड़क सुरक्षा शिक्षा	56 – 58

CHAPTER -1

संख्या पद्धति

1. दो संख्याओं का HCF ज्ञात करना।

   हलः– बड़ी संख्या में छोटी संख्या का भाग देना।

   उदा. 135) 225 (1

```
135 ) 225 ( 1
      135
      ---
       90 ) 135 ( 1
             90
            ---
            45 ) 90 ( 2
                 90
                ---
                 00
```

   HCF =45

2. HCF (306,657) =9 हो तो LCM (306,657) ज्ञात करना।

   हलः– LCM=$\frac{306 X 657}{9}$

   Trick

   दी गई संख्याओं के गुणनफल में HCF या LCM(जो दिया है) का भाग देना।

3. 3825 के अभाज्य गुणनखण्ड करना।

   हलः–

5	3825
5	765
3	153
3	51
17	17
	1

Trick

- दी गई संख्या के इकाई अंक सम होने पर 2 से शुरूआत करना।
- इकाई का अंक 0 या 5 होने पर 5 से शुरूआत करना।
- अन्यथा 3 / 7 / 11 / 13 आदि से शुरूआत करना।

4. $\frac{13}{125}$ की बिना लम्बी विभाजन प्रक्रिया द्वारा सांत दशमलव प्रसार में बदलना।

हलः–

* हर के अभाज्य गुणनखण्ड करना।
* तथा हर में 2 तथा 5 की घात समान बनाने के लिए आवश्यक 2 या 5 की घात का अंश व हर में गुणा करना।
* जिससे हर 10 की घात के रूप में प्राप्त होगा, उसके अनुसार अंश दशमलव प्रसार में बदलना।
* यदि संख्या कटती है तो काटने के बाद हर 2 तथा 5 के अलावा अन्य संख्या से विभाजित होती है तो असांत वरना सांत।

5. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका लिखना। इसकी सहायता से 255 व 867 का HCF ज्ञात करना।

हलः–

a= बडी संख्या, b= छोटी संख्या, b) a (q

r

a= bq+r (ए बालक क्यूं रोता है?)

a b q r

जहाँ $0 \le r < b$ (ओ राम बाबु)

के लिए a, b -> धनात्मक पूर्णांक

तथा q, r -> अद्वितीय पूर्ण संख्याएँ है। (घन अ पूर्ण है)

```
255 ) 867 ( 3
      765
      ----
      102) 255 ( 2
           204
           ----
            51) 102 ( 2
                102
                ----
                 00
```

(1) क्रम से भाज्य लिखना

(2) बराबर के बाद क्रम से भाज्य लिखना।

(3) गुणे में क्रम से भागफल लिखना।

(4) + के बाद क्रम से शेषफल लिखना।

867 = 255 X 3 + 102

255 = 102 x 2 + 51

102 = <u>51</u> x 2 + 0 HCF=51

6. दो संख्याओं का अभाज्य गुणखण्ड विधि से HCF व LCM ज्ञात करना।

हलः–

Eg. 96 व 104

2	96
2	48
2	24
2	12
2	6
3	3
	1

2	404
2	202
101	101
	1

* दोनों संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्ड संख्याओं पर गोला लगाना।
* उभयनिष्ठ संख्याओं को एक बार लिख कर गुणा करना HCF के लिए।
* LCM के लिए प्राप्त HCF में शेष अभाज्य गुणनखण्डों का गुणा करना।

H.C.F. = 2 x 2 = 4

L.C.M. = H.C.F. x शेष संख्याएं

= 4 x 2 x 1 x 2 x 3 x 101

7. सिद्ध करो कि $3\sqrt{2}$ परिमेय संख्या है।

हलः– माना कि $3\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है

$\therefore 3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

$\therefore \sqrt{2} = \frac{a}{3b}$

अपरिमेय परिमेय

जोकि विरोधाभास है।

$\therefore$ $3\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

8. $3 + 2\sqrt{5}$ अपरिमेय है।

हलः– माना कि $3 + 2\sqrt{5}$ परिमेय संख्या है

$\therefore 3 + 2\sqrt{5} = \frac{a}{b}$

$2\sqrt{5} = \frac{a}{b} - 3$

$\sqrt{5} = \frac{\frac{a}{b} - 3}{2}$

अपरिमेय परिमेय

जोकि विरोधाभास है।

$\therefore\ 3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

9. $5 - \sqrt{3}$ अपरिमेय सिद्ध करना है।

हलः– माना कि $5 - \sqrt{3}$ परिमेय संख्या है

$$\therefore\ 5 - \sqrt{3} = \frac{a}{b}$$

$$-\sqrt{3} = \frac{a}{b} - 5$$

$$\sqrt{3} = -\frac{a}{b} + 5$$

अपरिमेय   परिमेय

जोकि विरोधाभास है।

$\therefore\ 5 - \sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

Chapter – 2
बीज गणित(बहुपद)

विषय – बहुपद अंक भार (03)

(1) एक से ज्यादा पद

(2) घात धनात्मक (चर राशि की)

(3) जितनी घात उतने ही शून्यक होगे। उदाहरण सहित

रैखिक बहुपद → $2x - 3$, $\sqrt{3}x + 5$ (चर की एक बात)

बहुपद द्विघात बहुपद → $y^2 - 2$ (चर की एक बात)

त्रिघात बहुपद → $3x^2 - 2x^2$(चर की एक बात)

उदाहरण – द्विघात बहुपद $x^2 + 7x + 10$ के शून्यक ज्ञात करना और शून्यको तथा गुणांको के बीच संबन्ध की सत्यता की जॉच कीजिए।

$x^2 + 7x + 10 = 0$

$x^2 + 5x + 2x + 10$

$= (x + 2)\,(x + 5)$

शून्यक ज्ञात करना $x + 2 = 0$ अथवा $x + 5 = 0$

$x = -2$ अथवा $x = -5$

$x^2 + 7x + 10$ को $ax^2 + bx + c$ से Compare करने पर $a = 1, b = 7, c = 10$

सत्यता की जॉच (1) $-\frac{(x\ ka\ gunak)}{x^2 ka\ gunak}\ \frac{-6}{\text{a}} = \frac{(7)}{1} = -7$

check - $= (-2) + (-5) = 10$

(2) $\frac{Achar\ pad}{x^2 ka\ gunak} = \frac{\text{c}}{\text{a}} = \frac{10}{1} = 10$

check - $= (-2) + (-5) = 10$

प्रश्न–2 एक द्विघात बहुपद ज्ञात करना जिसमें शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमश –7 और 10 हो।

सूत्र– x^2–(शून्यको का योग) $x +$ (शून्यको का गुणा)

$= x^2 - (-7)x + (10)$

$= x^2 + 7x + 10$

उदाहरण–2 $x^2 - 3$ के शून्यक ज्ञात करो।

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$(x)^2 - (\sqrt{3})^2 = \left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$

$x - \sqrt{3} = 0$ OR $x + \sqrt{3} = 0$

$x = \sqrt{3}$ $\quad$ $x = -\sqrt{3}$

अतः शून्यक $\sqrt{3},\ -\sqrt{3}$

ध्यान देने योग्य बाते।

1. $p(x)$ के शून्यक उन बिन्दुओ के x निर्देशांक होते है जहॉं $p(x)$ का ग्राफ x –अक्ष को प्रतिच्छेद करता है।

भागफल

उदाहरण– $2x^2+3x+1$ को $x+2$ से भाग दीजिए।

$$x+2\ )\ 2x^2+3x+1\ (\ 2x-1$$

$$2x^2+4x$$

$$-\quad -$$

$$-x+1$$

$$-x-2$$

$$+\quad +$$

$$3$$

$$\frac{2x^2}{x}=2x$$

$$(x+2)\,2x$$

$$=2x^2+4x$$

$$\frac{-x}{x}=-1$$

भाज्य– $2x^2+3x+1$

भाजक– $x+2$

भाजक– $2x-1$

शेषफल– 3

रफ कार्य

$$5\sqrt{8}\quad 1$$

$$-5$$

$$3$$

भागफल–1

शेषफल–3

भाजक–5

भाज्य–8

विभाजन एल्गोरिथ्म

भाज्य़ = भाजक X भागफल + शेषफल

$$8 = 5 \ X\ 1 + 3$$

$$2x^2+3x+1 = (x+2)X\,(2x-1)+3$$

$$= 2x^2+4x-x-2+3$$

$$= 2x^2+3x+1$$

CHAPTER -3

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म (युगपत समीकरण)

ax+by+c=o दो चर (x,y) वाला रैखिक समीकरण है जहाँ a और b शून्य नहीं हैं।

क्र. सं.	रेखा युग्म	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	अनुपातों की तुलना	ग्राफीय निरूपण	बीज गणितीय निरूपण
1	$x-2y=0$ $3x+4y-20=0$ युग्म संगत	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	प्रतिच्छेद करती हुई रेखाएं	केवल एक हल (अद्वितीय)
2	$2x+3y-9=0$ $4x+6y-18=0$ युग्म आश्रित संगत	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	संपाती रेखाएं	अपरिमित रूप से अनेक हल
3	$x+2y-4=0$ $2x+4y-12=0$ युग्म असंगत	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	समानान्तर रेखाएँ	कोई हल नहीं

10. एक संख्या का तीन गुणा और दूसरी संख्या का दो गुणे का अन्तर 3 है। इसको बीज गणितीय रूप में लिखिए।

हलः— माना कि एक संख्या = x

दूसरी संख्या = y

$3x-2y=3$ ⟶ बीज गणितीय रूप

11.रैखिक समीकरण युग्म $\sqrt{2}x+\sqrt{3}y=0$ तथा $\sqrt{3}x-\sqrt{2}y=0$ का हल लिखिए।

हलः–

$$\sqrt{2}x+\sqrt{3}y=0 \rightarrow (1)\times\sqrt{2}$$

$$\sqrt{3}x-\sqrt{2}y=0 \rightarrow (2)\times\sqrt{3}$$

(3) + (4)

$$2x+\sqrt{6}y=0 \rightarrow (3)$$

$$\underline{3x-\sqrt{6}y=0 \rightarrow (4)}$$

$$5x=0 \qquad x=0$$

x का मान समी (1) में रखने पर

$$\sqrt{2}\times 0+\sqrt{3}y=0$$

$$0+\sqrt{3}y=0$$

$$y=0$$

अतः $x=0 \quad and \quad y=0$

12.7 पेन्सिल तथा 5 पेन का कुल मूल्य 29 रुपये है। इसको बीज गणितीय रूप में लिखिए।

हलः– एक पेन्सिल का मूल्य $=x$ रुपये

एक पेन का मूल्य $=y$ रुपय

अतः सही उत्तर $7x+5y=29 \rightarrow$ बीज गणितीय रूप

4. समीकरणों $x-y+1=0$ और $3x+2y-12=0$ का ग्राफ खींचिए। $x-$ अक्ष और इन रेखाओं से बने त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए और त्रिभुजाकार पटल को छायांकित कीजिए।

हलः—

$x - y + 1 = 0 \ (-1,0)$
$y = 0$ रखने पर
$x - 0 + 1 = 0$
$x = -1$
$x = 0$ रखने पर
$0 - y + 1 = 0$
$y = 1$
$(0,1)$
$3x + 2y - 12 = 0$
$x = 0$ रखने पर
$3 \times 0 + 2y - 12 = 0$
$2y = 12$
$y = \frac{12}{2}$
$= 6$
$(0,6)$
$y = 0$ रखने पर
$3x + 2 \times 0 - 12 = 0$

$3x - 12 = 0$
$3x = 12$
$x = 4$
$(4,0)$ समी.

$(-1,0)\ (0,1)(2,3)$

x	**-1**	**0**	**2**
y	**0**	**1**	**3**

रफ कार्य

$3x + 2y = 12 \ \rightarrow (\text{Eq. } 1)$

$x - y = -1 \ \rightarrow \ (Eq. 2)$

समी. 2 को 2 से गुणा कर जोड़ने पर

$2x - 2y = -2 \ \rightarrow (3)$

$\underline{3x + 2y = 12 \ \rightarrow (1)}$

$5x = 10$

$x = \frac{10}{5}$

$x = 2$

x	**0**	**4**	**2**
y	**6**	**0**	**3**

$(0,6)\ (4,0)(2,3)$

5. 5 सेवों और 3 सन्तरों का कुल मूल्य 35 रुपये है जबकि 2 सेवों और 4 सन्तरों का कुल मूल्य 28 रुपये है। इस समस्या को बीजगणितीय रुप में व्यक्त कर ग्राफ विधि से हल कीजिए।

हल : माना कि एक सेव का मूल्य $= x$ रुपये है
एक सन्तरे का मूल्य $= y$ रुपये है
बीजगणितीय रूप
$5x + 3y = 35 \ \rightarrow (1)$
$2x + 4y = 28 \ \rightarrow (2)$
पक्षान्तरण करने पर
$5x = 35 - 3y$
$y = 0$
$5x = 35 - 3 \times 0$
$5x = 35$
$x = \frac{35}{5}$ $\qquad x = 7$

-3	x	**7**	**4**	**1**
5	y	**0**	**5**	**10**

महत्वपूर्णः—

(i) चिन्ह सहित x का गुणांक y के साथ सारणी में लिखना, चिन्ह सहित y का गुणांक x के साथ सारणी में लिखना। जैसे y के पूर्व में 5 व x के पूर्व में -3 लिखेंगे।

(ii) पूर्व प्राप्त मानों को उन गुणांको के साथ जोड़ने पर नये निर्देशांक प्राप्त हो जायेंगे।

$x = 7 - 3 = 4$ -3+4=1

$y = 0 + 5 = 5$ इसी प्रकार 5+5=10

इसी प्रकार

$$2x + 4y = 28$$
$$2x = 28 - 4y$$

$y = 0$

-4	x	**14**	**10**	**6**	**2**
2	y	**0**	**2**	**4**	**6**

$$2x = 28 - 4 \times 0$$
$$2x = 28$$
$$x = \frac{28}{2}$$

$x = 14$

------------------*****-------------------**

Chapter – 4 (द्विघात समीकरण)

(1) दो भिन्न वास्तविक मूल होते है। यदि $b^2 - 4\,ac > 0$

(2) दो बराबर वास्तविक मूल होते है। यदि $b^2 - 4\,ac = 0$

(3) कोई वास्तविक मूल नही होता, यदि $b^2 - 4\,ac < 0$

(1) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

$a = 2,\ b = -3,\ c = 5$

$b^2 - 4\,ac > 0$

$(-3)^2 - 4 \times 2 \times 5 = 9 - 40$

$= -31 < 0$ तो कोई वास्तविक मूल नही है।

(2) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

$a = 2,\ b = -6,\ c = 3$

$b^2 - 4\,ac$

$(-6)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 36 - 24 = 12 > 0$

मूल भिन्न 9 वास्तविक होगें।

अगर दिया है कि मूल बराबर हैं। तो K का मान ज्ञात करना।

$kx(x-2) + 6 = 0$

$kx^2 - 2kx + 6 = 0$

$a = k,\ b = -2k,\ c = 6$

$(b)^2 - 4ac = 0$

$(-2k)^2 - 4 \times k \times 6 = 0$

$4k^2 - 24k = 0$ $\qquad k = 0$

$4k(k-6) = 0$ $\qquad k = 6$

check :-

$k = 0$ से स्वीकार्य नहीं

$k = 6$ से $6x^2 - 12x + 6 = 0$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$a = 1,\ b = -2,\ c = 1$

$(-2)^2 - 4 \times 1 \times 1$

$4 - 4 = 0$ (वास्तविक)

3. द्विद्यात बहुपद $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का होता है।

जहां a,b,c वास्तविक संख्याएं है।

$ax^2 + bx + c$ के शून्यक और द्विघात समीकरण के मूल एक ही होते है।

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

$x^2 -$ (मूलों का योग) $x +$ मूलों का गुणा $= 0$

द्विघात समीकरण की पहचान

बहुपद जिसमें x की घात 2 हो अर्थात x^2 हो उन्हे द्विघात बहुपद कहते है जैसे x^2+5, $3x^2-7x+1$ इत्यादि ax^2+bx+c एक द्विघात बहुपद का रूप है जब द्विघात बहुपद को शून्य के बराबर करते है तो हमे द्विघात समीकरण प्राप्त होता है।

$ax^2+bx+c=0$ एक द्विघात समीकरण है। इसे द्विघात समीकरण का मानक रूप कहते है। यहाँ a, b, c वास्तिविक संख्याए होती है।

उदाहरण–(1) जॉच करो कि निम्न द्विघात समीकरण है या नही

$$(x-2)^2+1=2x-3$$
$$x^2-4x+4+1=2x-3$$
$$x^2-4x+5-2x+3=0$$
$$x^2-6x+8=0$$

यह $ax^2+bx+c=0$ के प्रकार का है अतः यह एक द्विघात समीकरण है।

(2) $x(x+1) \quad +8=(x+2)(x-2)$

$$x^2+x+8=x^2-4$$
$$x^2+x+8-x^2+4=0$$
$$x+12=0$$

यह $ax^2+bx+c=0$ के प्रकार का नहीं है इसलिए दिया गया समीकरण द्विघात समीकरण नही है।

द्विघात समीकरण का हल

द्विघात समीकरण मे x का मान प्रतिस्थापित करने पर यदि गया पक्ष शून्य प्राप्त हो तो वह x का वह मान द्विघात का एक हल होगा अथवा शून्यक या मूल कहलाता है। जैसे

$$x^2-3x-10=0$$

समीकरण मे $x=-2$ रखने पर

$$(-2)^2-3(-2)-10=0$$
$$4+6-10=0$$

बांया पक्ष शून्य प्राप्त होता है अतः $x=-2$ इस द्विघात समीकरण का एक हल है। $x=-2$ को मूल अथवा शून्यक भी कह सकते है। द्विघात के अधिक से अधिक 2(दो) मूल हो सकते है।

द्विघात समीकरण का मूल ज्ञात करने की निम्न लिखित विधियॉ है।

1. गुणनखण्ड विधि
2. पूर्ण वर्ग बनाकर
3. द्विघाती सूत्र द्वारा

1. गुणनखण्ड विधि द्वारा द्विघात समीकरण का हल ज्ञात करना

दिये गये समीकरण को दो रेखिक गुणनखण्डो में खण्डित किया जाता है तत्पश्चात प्रत्येक गुणनखण्ड को शून्य के बराबर रखकर हल प्राप्त किये जाते है।

उदाहरण–1

$$x^2-5x+6=0$$
$$x^2-2x-3x+6=0$$
$$x(x-2) \quad -3(x-2)=0$$
$$(x-2)(x-3)=0$$

यदि $x-2=0$ | $x-3=0$

तो $x=2$ | $x=3$

2. **पूर्ण वर्ग बनाकर द्विघात समीकरण हल करना–**

पूर्ण वर्ग विधि से प्रश्नो को हल करने के लिए द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप को पूर्ण वर्ग रूप $(x + a)^2 - \mathrm{b}^2 = 0$ में बदलना होगा इसके बाद समीकरण के मूल आसानी से प्राप्त हो सकते है।

उदाहरण–1 $x^2 - 4x - 5 = 0$

$x^2 - 4x = 5$

$x^2 - 4x + 4 = 5 + 4$ (x के गुणाक का आधा का वर्ग दोनो तरफ जोडना है।)

$(x - 2)^2 = 9$

$(x - 2) = \pm 3$

$(x - 2) = 3$, और $(x - 2) = -3$

$x = 5$ तथा $x = -1$

उदाहरण–2 $3x^2 - 5x + 2 = 0$

$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$

$x^2 - \frac{5}{3}x = -\frac{2}{3}$

$x^2 - \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right) = -\frac{2}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)$

$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$

$x - \frac{5}{6} = \pm\frac{1}{6}$

$x - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$	$x - \frac{5}{6} = -\frac{1}{6}$
$x = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}$	$x = -\frac{1}{6} + \frac{5}{6}$
$= \frac{6}{6}$	$= \frac{4}{6}$
$x = 1$	$x = \frac{2}{3}$

3. **द्विघाती सूत्र द्वारा द्विघात समीकरण का हल–**

द्विघाती सूत्र $x = \frac{-b \quad \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

– सर्वप्रथम समीकरण को $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप मे लिखिए

– a, b, तथा c क्रमश x^2 , x तथा अचर गुणांक ज्ञात करे।

– a, b, c के मान सूत्र मे रखकर दो मूल प्राप्त करे।

उदाहरण– $3x^2 - 5x + 2 = 0$

समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में है।

$a = 3, \quad b = -5, \ c = 2$

$x = \frac{-b \quad \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$= \frac{- \ -5 \quad \sqrt{\ -5\ ^2-4x3x2}}{2x3}$

$= \frac{5 \quad \sqrt{25-24}}{6}$

$x = \frac{5 \quad 1}{6}$

$x = \frac{5+1}{6}$ तथा $x = \frac{5-1}{6}$

$= \frac{6}{6} = 1$ $\qquad = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

<u>मूलों की प्रकृति</u>

द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ मे a, b, तथा c प्राप्त करने के बाद $b^2 - 4ac$ का मान ज्ञात करते है।

यदि (a) $b^2 - 4ac > 0$ हो तो मूल दो भिन्न भिन्न तथा वास्तविक मूल प्राप्त होते है।

(b) $b^2 - 4ac = 0$ हो तो मूल दो बराबर एवं वास्तविक प्राप्त होते है।

(c) $b^2 - 4ac < 0$ हो तो कोई भी मूल वास्तिविक नही होता है।

निम्नलिखित उदाहरणो से स्पष्ट है।

उदाहरण– (a) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

प्रश्न मे $a = 2,\ a = 2, b = -3,\ c = 5$ है।

$b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\text{x}2x5$

$= 9 - 40$

$= -31 < 0$

दोनो मूल वास्तविक नही है।

उदाहरण– (b) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

प्रश्न मे $a = 2,\ b = -6,\ c = 3$ है।

$b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4\text{x}2x3$

$= 36 - 24$

$= 12 > 0$

दोनो मूल भिन्न एवं वास्तविक होगे।

उदाहरण– (c) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

$a = 3,\ b = -4\sqrt{3},\ c = 4$

$b^2 - 4ac = (-4\sqrt{3})^2 - 4\text{x}3x4$

$= 48 - 48 = 0$

दोनो मूल बराबर एवं वास्तविक होगे।

(2) एक रेलगाडी एक समान चाल से 360 कि.मि . की दूरी तय करती है। यदि चाल 5 कि.मि ./घन्टा अधिक होती, तो वह उसी यात्रा में 1 घन्टा कम समय लेती है। रेलगाडी की चाल ज्ञात करो।

हलः–

दूरी=360 क.मि.

माना रेलगाडी की चाल = x कि.मी./घन्टा

360 कि.मि. दूरी तय करने में लगा समय $= \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{360}{x}$ घन्टा

चाल बढाने पर नयी चाल = (x+5)कि.मी./घन्टा

समय $= \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{360}{x+5}$ कि.मी./घन्टा

समय में अन्तर

$$\frac{360}{x} - \frac{360}{x+5} = 1$$

या, $\frac{360(x+5) - 360x}{x(x+5)} = 1$

या, $360x + 1800 - 360x = x(x+5)$

या, $x^2 + 5x - 1800 = 0$

या, $x^2 + 45x - 40x - 1800 = 0$

या $x(x+45) - 40(x+45) = 0$

$(x+45)(x-40) = 0$

$x+45 = 0,\ x-40 = 0$

$x = -45$, $x = 40$

$x = -45$ अमान्य क्योंकि चाल ऋणात्मक नहीं हो सकती है।

अतः रेल गाडी की चाल = 40 कि.मी./घन्टा।

CHAPTER -5

समान्तर श्रेढी (Arithemetic Progression)

श्रेढियाः–

(i) 1,2,3,4,5,.....................................

(ii) 3,5,7,9,11....................................

(iii) 10,5,0,–5,.....................................

(iv) –37,–33,–29..........................

(V) $2\frac{1}{2},\ 5,\ 7\frac{1}{2},\ 10 \ldots\ldots\ldots$

पहचान–

⇨ उपरोक्त श्रेढियों को देखने पर पता चलता है कि सभी श्रेढियों में पदो का अन्तर हमेशा समान आता है (चाहे वह धनात्मक हो या ऋणात्मक अन्तर)

जैसा की (i) मे पदो का अन्तर

2-1=1, 3-2=1, 4-3=1, 5-4=1

जैसा की (ii) मे पदो का अन्तर

5-10= -5,0-5=-5, -5-0=-5,

जैसा की (iii) मे पदो का अन्तर

5-10= -5, 0-5= -5, -5-0= -5,………………

जैसा की (iv) मे पदो का अन्तर

$5-2\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}, -5 = 2\frac{1}{2}, \ldots\ldots....$

अतः इस प्रकार की श्रेणियां समान्तर श्रेढी (A.P) कहलाती है।

⇨ समान्तर श्रेढी के प्रथम पद को 'a'से बताया जाता है

⇨ समान्तर श्रेढी के पदो के अन्तर को सार्व अन्तर 'd'सें बताया जाता है।

(A) समान्तर श्रेढी का मानक रूपः–

a, a+d, a+2d, a+3d, ……………………..a+(n-1)d

उदा (i) एक समान्तर श्रेढी का प्रथम पद 3व सार्वअन्तर 4 हो श्रेढी के प्रथम चार पद लिखिये

हल– श्रेढी के प्रथम चार पद = a, a+d, a+2d, a+3d

= 3,3+4, 3+2×4, 3+3×4

= 3,7,11,15

उदा (ii) एक A.P का प्रथम पद 5 व सार्व अन्तर –2 हो तो श्रेढी के प्रथम पॉच पद लिखिये।

हलः– श्रेढी के प्रथम पॉच पद =a, a+d,a+2d, a+3d, a+4d

5,5-2,5+2×(-2), 5+3×(-2), 5+4×(-2)

5, 3,5-4,5-6,5-8

5,3,1,-1,-3

(B) समान्तर श्रेढी का n वां पद ज्ञात करनाः–

$T_n=a+(n-1)d$

यहॉ T_n = पदो की संख्या (No. of Term)

उदा (i) AP 2,5,8……………….. का 12 वॉ पद ज्ञात करो।

∵ a=2, d=5-2=3 व n=12

$T_n= a+(n-1)\ d$

$T_{12}= 2+(12-1)\times3$

$T_{12}= 2+11\times3$

= 2+33

= 35

या

$T_{12} = a+11\ d$

$T_{12} =a+2\times3$

= 2+11×3

= 2+33=35

उदा (ii) AP: 21,18,15,………………..का कौनसा पद–81 है

a=21,d=18-21=-3, T_n=-81

$T_n=a+(n-1)\ d$

$-81=21+(n-1) \times (-3)$

$-81-21=-3n+3$

$-102-3=-3n$

$n=\frac{105}{3}=35$

n=35

उदा (iii) 28 पदो वाली समान्तर श्रेढी 7,16,25,34,…………..का अन्तिम पद ज्ञात करो।

a=7, d=16-7,=a, n=28

T_n=?

$T_n=a+(n-1)\ d$

$T_{28}=7+(28-1)\times9$

7+(28-1) ×9

7+27 ×9

7+243

= 250

उदा (iv) A P निर्धारित कीजिये जिसका तीसरा पद 5 व 7 वॉ पद 9 है

$a+2d=5$ -(i)

$a+6d=9$ -(ii)

(i)-(ii) से

$$\begin{array}{r} a+2d=5 \\ a+6d=9 \\ \underline{-\ -\quad -} \\ -4d=-4 \\ d=1 \end{array}$$

d का ज्ञान (i) मे रखने पर,

$a+2\times1=5$

$a=5-2$

$a=3$ A P=3,4,5,6……………………

उदा (v) 10 और 250 के बीच में 4 के गुणज कितने है

हलः— 12,16,20……………248

$a=12$, $d=16-12=4$, $T_n=248$, $n=?$

$T_n=a+(n-1)\,d$

$248=12+(n-1)\times4$

$248-12=(n-1)\times4$

$(n-1)=236/4$

$n-1=59$

$n=59+1=60$

$n=60$

(c) समान्तर श्रेढी के n पदो का योगफल यदि a,d व n दिया गया हो व Sn= पदो का योग

(i) $S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ (ii) $S_n=\frac{n}{2}[a+l]$ यदि (a, n तथा अन्तिम पद l दिया गया हो)

उदा (ii) A P 2,7,12……………के 10 पदो का योगफल ज्ञात करो।

$a=2$, $d=7-2=5$, $n=10$

$S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)\,d]$

$S_n=\frac{10}{2}[2\times2+(10-1)\,5]$

$S_{10}=5\times[4+9\times5]$

$=5\times(4+45)$

$=5\times49=245$

उदा (iii) 636 योग प्राप्त करने के लिए A P : 9,17,25,……………के कितने पद लेने चाहिए ?

हलः– Sn=639, a=9, d=17-9=8 n=?

$S_n = \frac{n}{2}$ [2a+(n-1)d]

$636= \frac{n}{2} [2\times9+(n-1)8]$

$636= \frac{2n}{2}$ [9+(n-1)4]

636=n [9+4n-4]= n [5+4n]

$636=5n+4n^2$

$4n^2+53n-48n-636=0$

$4n^2+53n-48n-636=0$

n(4n+53)-12(4n+53)=0

(4n+53) (n-12)=0

4n+53=0 | n-12=0

$n= -\frac{53}{4}$ व | n=12

उदा (iii) किसी A P का प्रथम पद 5, अन्तिम पद 45 और योग 400 है पदों की संख्या ज्ञात करो।

हल– a=5 l=45=a,n, Sn=400

$a_n=45$

a+(n-1)d=45

5+ (n-1)d=45

(n-l) d=45-5

(n-1) d=40…………………………..(i)

$S_n= \frac{n}{2}$ [2a+(n-1)d]

$400= \frac{n}{2} [2\times5+40]$ (n-1) d=40 समीकरण न. 1 मे रखने पर

$400 = \frac{n}{2}$ [10+40]

$400 = \frac{n}{2} \times50$

$n= \frac{400}{25}$

n=16

उदा (iv) मे ऐसे प्रथम 40 धन पूर्णांको का योग ज्ञात कीजिए जो 6 से विभाज्य है

हलः– 6,12,18,24,30,36,42,…………….

a=6 d=12-6=6 n=40

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$= \frac{40}{2}[2 \times 6 + (40-1) \times 6]$$

$$= 20[12+39\times 6]$$

$$= 20\times 246$$

$$= 4920$$

D प्रथम n धन पूर्णाकों का योगः–

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

उदा– (i) 1 से 50 तक संख्याओ को योग ज्ञात करो।

हलः– $S_n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{50\times(50+1)}{2}$

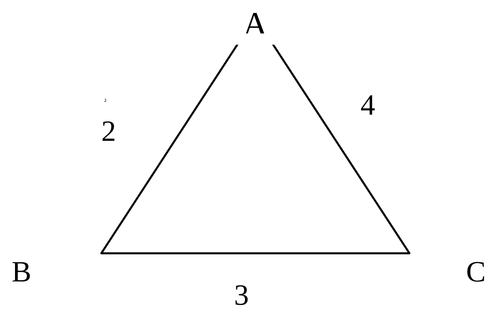
$$\frac{50\times 51}{2} = 1275$$

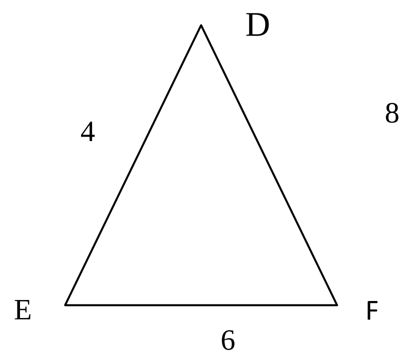
CHAPTER -6

ज्यामिति

त्रिभुज

1. समरूप त्रिभुज – जिन दो त्रिभुजो की भुजाएं समानुपाती हो।

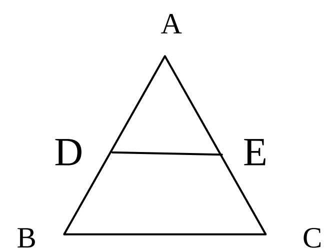




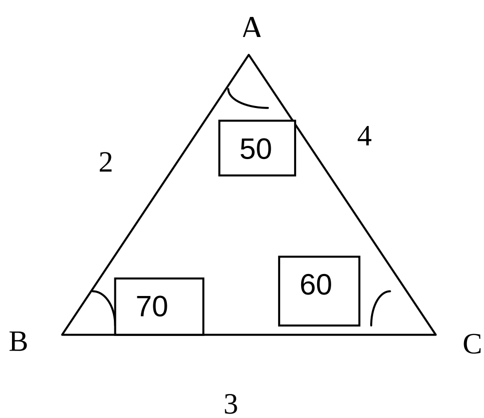
$\triangle ABC \sim \triangle DEF$

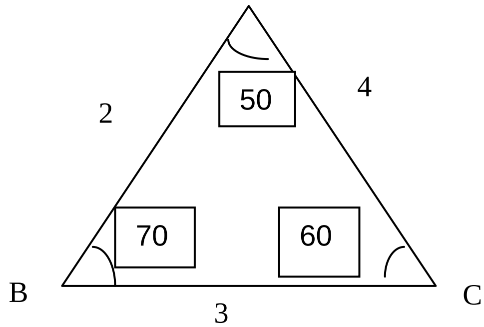
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$$

2. किसी त्रिभुज ABC में DE ∥ BC हो तो $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$



3. सर्वागसम त्रिभुज :– जिन दो त्रिभुजों में संगत भुजाऐं व संगत कोण बराबर हो (जो एक दूसरे को पूरा–पूरा ढक लें)





ABC ≅ DEF

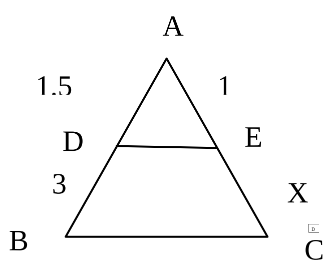
सर्वागसम त्रिभुजो की पहचान :–

1. भुजा–भुजा –भुजा (SSS) नियम – संगत भुजाएं समान।
2. भुजा–कोण–भुजा (SAS) नियम – दो संगत भुजाएं व बीच का कोण समान।
3. कोण–भुजा–कोण (ASA) नियम – एक भुजा व उस पर दो संगत कोण समान।

विशेष :– सर्वागसम त्रिभुज हमेशा समरूप होते है लेकिन आवश्यक नही है कि समरूप त्रिभुज भी सर्वागसम हो।

महत्वपूर्ण प्रश्न :–

1. त्रिभुज ABC में DE ∥ BC हो तो X का मान ज्ञात करिए :–

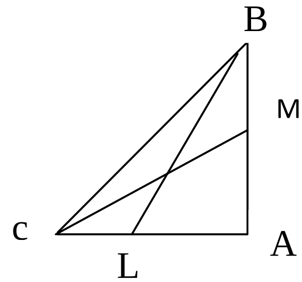


संकेत $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

2. यदि किसी वर्ग की प्रत्येक भुजा a हो तो उसका विकर्ण ज्ञात करिए:–
3. सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर अन्य दो भुजाओं को भिन्न–भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने के लिए एक रेखा खींची जाए, जो ये अन्य दो भुजाऐं एक ही अनुपात में विभाजित हो जाती हैं।

4. BL और CM समकोण $\triangle$ABC की माध्यिकाएं है तथा कोण A = 90^0 तो सिद्ध करो कि

$4(BL^2 + CM^2) = 5\,BC^2$



5. ABCD एक समलंब है जिसमें AB ‖ DC है। असमांतर भुजाओं AD और BC पर क्रमशः बिन्दु E और F इस प्रकार स्थित है कि EF भुजा AB के समांतर है तो सिद्व करो कि

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

प्रमेय आधारित प्रश्नों को हल करने के चरण

चित्र निर्माण – यदि प्रश्न में नहीं दिया गया है तो प्रश्न के आधार पर निर्माण करना है।

दिया गया है – प्रश्न की भाषा में से चुनकर शाब्दिक या गणितीय भाषा में लिखा जाना है।

सिद्ध करना है– प्रश्न की भाषा में से चुनकर लिखना है। यथा सम्भव गणित की भाषा में प्रतीक चिन्हों का प्रयोग कर लिखना है।

रचना – यदि प्रश्न में आवश्यक हो तो करनी है।

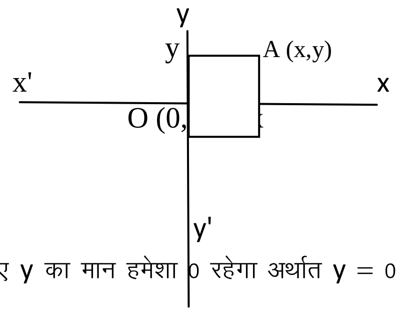
उपपत्ति – दिया गया है, से प्रारम्भ करते हुए चरणबद्ध रूप से गणितीय सिद्धान्तों से सिद्ध करना है, तक पहुचना है।

CHAPTER -7

निर्देशांक ज्यामिति

किसी कार्तिय तल पर स्थित किसी बिन्दू के निर्देशांक निर्धारित करने के लिए दो युग्म (x अक्ष व y अक्ष) की आवश्यकता होती है। जिन्हे निम्न प्रकार से दर्शातें है।

चित्रानुसार दोनो अक्ष जहॉ मिलते है, वह बिन्दू, मूल बिन्दू (0,0) कहलाता है।



बिन्दू A के लिए

x का निर्देशांक = (भुज) y अक्ष से दूरी

y का निर्देशांक = (कोटि) x अक्ष से दूरी

मुख्य बिन्दू

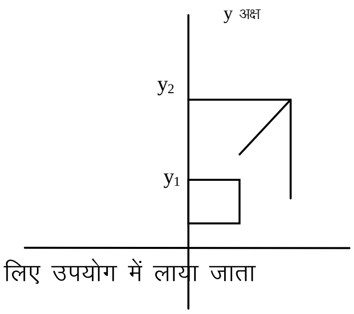
1. यदि कोई बिन्दू x अक्ष पर स्थित हो तो उस स्थिति मे उस बिन्दू के लिए y का मान हमेशा 0 रहेगा अर्थात y = 0 होगा। अतः उस बिन्दू के निर्देशांक (x, 0) होगे।
2. इसी प्रकार यदि कोई बिन्दू y अक्ष पर स्थित हो तो उस स्थिति मे उस बिन्दू के लिए x का मान हमेशा 0 रहेगा अर्थात x =0 होगा। अतः उस बिन्दू के निर्देशांक (0, y) होगें।

महत्वपूर्ण सुत्र –

(1) दूरी सुत्र – किसी कार्तिय तल पर स्थित बिन्दूओ P एवं Q के निर्देशांक क्रमशः $P(X_1\ Y_1)$ तथा $Q(X_2\ Y_2)$ हो उन दोनो बिन्दूओ के बीच की दूरी ज्ञात करने हेतु निम्नानुसार सूत्र का प्रतिपादन होगा।

दो बिन्दुओ के बीच की दूरी PQ $=\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

या PQ = $\sqrt{(x \text{ के निर्देशांको का अंतर})^2 + (y \text{ के निर्देशांको का अंतर})^2}$



उक्त दूरी का सुत्र, त्रिभुज की भुजाओ तथा चतुर्भुज की भुजाओं को ज्ञात करने के लिए उपयोग में लाया जाता है।

किसी भी त्रिभुज के लिए उसकी दो भुजाओ का योग तीसरी भुजा से अधिक होना चाहिए।

त्रिभुज

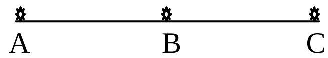
- समबाहु त्रिभुज (सभी भुजाए समान)
- समद्विबाहू त्रिभुज (कोई दो भुजाए समान)
- विषमबाहू त्रिभुज (कोई भुजा समान नही)

इसी प्रकार चतुर्भुज की भुजाओ के लिए

चतुर्भुज

- चारो भुजाऍ समान
  - विकर्ण समान (वर्ग)
  - विकर्ण असमान (समचतुर्भुज)
- आमने सामने की भुजाऍ समान
  - विकर्ण समान (आयत)
  - विकर्ण असमान (समान्तर चतुर्भुज)

नोट :– (1) यदि तीन बिन्दुओ को संरेखी सिद्ध करना हो तो AB, BC व AC दूरी सूत्र से ज्ञात कर AB+BC=AC सिद्ध करेगे।



(2) यदि समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना हो तो

समचतुर्भुज का क्षेत्र= $\frac{1}{2}$ X विकर्ण$_{(1)}$ X विकर्ण$_{(2)}$

(2) विभाजन सुत्र – इसी प्रकार यदि किन्ही दो बिन्दूओ के बीच कोई अन्य बिन्दू स्थित हो तो बीच स्थित बिन्दू के निर्देशांक –
– बिन्दू $P(x_1\, y_1)$ तथा बिन्दू $Q(x_2\, y_2)$ के बीच स्थित बिन्दू R हो जिसके निर्देशांक माना (x, y) हो तब

$$x = \frac{m_1\, x_2 + m_2\, x_1}{m_1 + m_2}$$

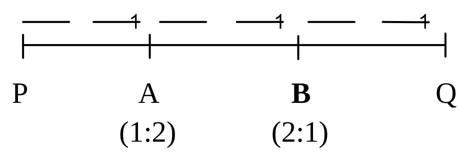
इसी प्रकार

$$y = \frac{m_1\, y_2 + m_2\, y_1}{m_1 + m_2}$$

मध्य बिन्दू के निर्देशांक– मध्य बिन्दू के लिए अनुपात $m_1{:}m_2 = 1{:}1$

$x = \frac{x_1+x_2}{2}$ तथा $y = \frac{y_1+y_2}{2}$

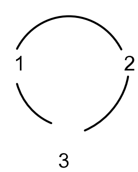
यदि किसी रेखाखंड को सम त्रिभाजित किया जाता है अर्थात् समान तीन भागो में बांटने पर निम्नानुसार बीच स्थित बिन्दुओ के निर्देशांक ज्ञात करेगें।



i. बिन्दू A के निर्देशांक ज्ञात करने के लिए $m_1{:}m_2=1{:}2$ किया जाएगा।
ii. बिन्दू B के निर्देशांक ज्ञात करने के लिए $m_1{:}m_2=2{:}1$ किया जाएगा।

(3) त्रिभुज का क्षेत्रफल– यदि किसी त्रिभुज ABC के निर्देशांक $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ तथा $C(x_3,y_3)$ है तो किसी त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल=

△ का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\,[x_1\,(y_2 - y_3) + x_2\,(y_3 - y_1) + x_3\,(y_1 - y_2)]$



नोट :– (1) उक्त सुत्र अंक 1 2 3 के चक्रीय आर्डर के द्वारा बच्चो को याद करवाया जा सकता है।
(2) क्षेत्रफल का मान कभी ऋणात्मक नही होता है। अतः ऋणात्मक मान आने पर भी उसे धनात्मक लिखेगे।

- यदि किसी स्थिति मे तीन बिन्दुओ के द्वारा बने त्रिभुज का क्षेत्रफल = 0 होता हो तो बिन्दू संरेखी होगे।
- चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो त्रिभुजों मे बाटता है इन दोनो त्रिभुजो का क्षेत्रफल निकालकर जोडने पर चतुर्भुज का क्षेत्रफल प्राप्त होगा।

सम्बन्धित प्रश्नः–

प्रसं (1) बिन्दू (8,12) की y अक्ष से दूरी लिखिए–
उ0– y अक्ष से दूरी अर्थात x का निर्देशांक = 8
प्रसं (2) बिन्दू (2,–3) की x अक्ष से दूरी लिखिए–
उ0– x अक्ष से दूरी अर्थात y का निर्देशांक = 3 (दूरी ऋणात्मक नही होती है।)
प्रसं (3) बिन्दू (–3,4) की भुज व कोटि बताइए
उ0– भुज = –3 कोटि = 4
प्रसं (4) मूल बिन्दू के निर्देशांक बताइए।
उ0– (0,0)

प्रसं (5) बिन्दू (–6,7) और (–1,–5) के बीच की दूरी ज्ञात करो।

उ0– बिन्दू $P(x_1,y_1) = (-6,7)$

बिन्दू $Q(x_2,y_2) = (-1,-5)$

दूरी के सुत्र से हल करना $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

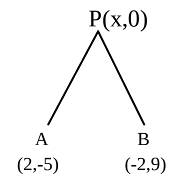
$$PQ = \sqrt{(-5)^2 + (12)^2} = \sqrt{25 + 144}$$

$$= \sqrt{169} = 13$$

प्रसं (6) x अक्ष पर स्थित बिन्दू के निर्देशांक लिखो

उ0– (x,0)

प्रसं (7) x अक्ष पर वह बिन्दू ज्ञात कीजिए जो (2,–5) और (–2,9) से समदूरस्थ है।



उ0– माना x–अक्ष पर स्थित बिन्दू P(x,0) हो

बिन्दू A = (2,-5) तथा बिन्दू B(-2,9) हो तो

प्रश्नानुसार PA = PB

दूरी सुत्र की सहायता से हल किया जायें।

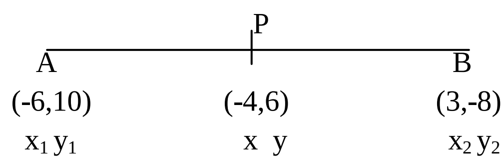
प्रसं (8) क्या बिन्दू (1,5) (2,3) और (–2,–11) संरेखी हो

इस प्रश्न को हल करने के लिए (1) दूरी सुत्र का प्रयोग तथा

(2) △ के क्षेत्रफल वाले सुत्र का प्रयोग कर भी हल कर सकते है। यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल शुन्य आता है, तो संरेखी होगे।

प्रसं (9) बिन्दू (–4,6), बिन्दूओ A(–6,10) और B(3,–8) को जोडने वाले रेखाखंड को किस अनुपात में विभाजित करता है।

चूकि बिन्दू (–4,6) विभाजित कर रहा है अर्थात



अनुपात ज्ञात करना है माना $m_1:m_2$ है इस स्थिति के किसी एवं ज्ञात निर्देशांक (x) या (y) वाले सुत्र का प्रयोग कर अनुपात ज्ञात कर सकता है।

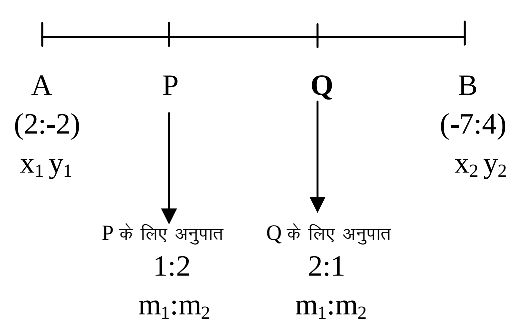
$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$$

$$\frac{-4}{1} = \frac{(m_1)(3) + (m_2)(-6)}{m_1 + m_2}$$

वज्र गुणा से $\frac{m_1}{m_2}$ हल कर $m_1:m_2$ ज्ञात करना।

प्रसं (10) बिन्दूओ A(2,–2) और B(–7,4) को जोडने वाले रेखाखंड को सम त्रिभाजित करने वाले बिन्दूओ के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

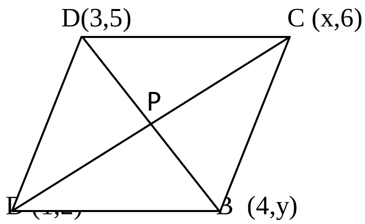
उ0 हम जानते है कि सम त्रिभाजन हेतु दो बिन्दू P, Q होगे।



$\frac{P}{Q}$ के लिए निर्देशांक हेतु सुत्र $\boxed{x = \frac{m_1\,x_2 + m_2\,x_1}{m_1 + m_2}}$ $\boxed{y = \frac{m_1\,y_2 + m_2\,y_1}{m_1 + m_2}}$

प्रसं (11) वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिन्दुओ A(1,–5) और B(–4,5) को मिलाने वाला रेखाखंड x–अक्ष से विभाजित होता है। इस विभाजन बिन्दू के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

प्रसं (12) यदि बिन्दू (1,2) (4, y) (x,6) और (3,5) इसी क्रम मे लेने पर एक समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष हो तो x और y के मान ज्ञात कीजिए।

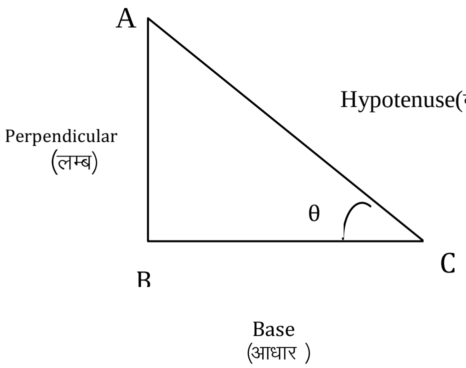


चूंकि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण मध्य बिन्दू पर समद्विभाजित करते है अतः दोनो स्थितियों मे P मध्य बिन्दू को ज्ञात कर उन्हे समान कर वज्र गुणा से हल करना।
इस हेतु मध्य बिन्दू सूत्र का उपयोग करेगे।

CHAPTER -8

Trigonotmetry (त्रिकोणमिती)

TRIGONOMETRIC RATIOS (त्रिकोणमितीय अनुपात)



नियम :– 1 सबसे लम्बी भुजा कर्ण होती है, जो कि हमेशा समकोण के सामने की भुजा होती है ।

नियम:- 2 $\angle A + \angle B + 90 = 180$

नियम: -3 त्रिकोणमितीय अनुपात

1. $\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$ = opp of = Cosecant θ

2. $\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$ = opp of = secant θ

3. tangent $\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$ = opp of = Cotangent θ

4. Cosecant $\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$ = opp of = sin θ

5. Secant $\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$ = opp of = Cos θ

6. Cotangent $\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$ = opp of = Cotangent θ

Note :-

1 Sin (angle you are looking from) = $\frac{\text{सम्मुख भुजा की लम्बाई}}{\text{कर्ण की लम्बाई}}$

(i) $\sin A = \frac{BC}{AC}$

(ii) $\sin C = \frac{AB}{AC}$

2 यह ध्यान रहे कि sin θ संक्षिप्त रूप है 'sine of angle θ' का । यह sin और θ का गुणन नहीं है ।

Remark :- त्रिकोणमितीय अनुपातों की परिभाषाओं से यह स्पष्ट है कि किसी भी न्यून कोण θ, के लिए :–

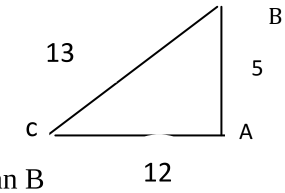
1 $\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ या $\sin\theta = \frac{1}{\text{Cosec}\theta}$ $\sin\theta \times \text{cosec}\,\theta = 1)$

2 $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ या $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ $(\cos\theta \times \sec\theta = 1)$

3 $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$ या $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ $(\cos\theta \times \sec\theta = 1)$

4 $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ और $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

Examples



1 ∆ ABC में यदि ∠ Aसमकोण हो तथा यदि AB=5, AC=12, तो sin B, cos C व tan B ज्ञात करो :–

$BC = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$

(i) $\text{Sin B} = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{13}$

(ii) $\text{Tan B} = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{5}$

(iii) $\text{Cos C} = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{13}$

∆ ABC में ∠ c न्यून कोण के अनुसार

आधार AC = 12 और कर्ण = BC= 13

लम्ब = AB = 5

2 यदि $\cos\theta = \frac{8}{17}$, तो शेष पांचों त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करो ।

3 समकोण त्रिभुत ABC में यदि B समकोण हो तथा $\text{Sin A} = \frac{3}{5}$, तो ∠C के समस्त छः त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करो ।

4 यदि cosec A=2 हो तब $\frac{1}{\text{Tan A}} + \frac{\sin A}{1+\cos A}$ का मान ज्ञात करो

5 यदि $\tan A=\sqrt{2}-1$, तो सिद्ध कीजिये कि $\frac{\sin A}{1+\cos A}$ का मान ज्ञात करो

6 यदि 16 cot A =12 तो $\frac{\sin A+\cos A}{\sin A-\cos A}$ का मान ज्ञात करो ?

7 यदि $\tan\theta= \frac{12}{13}$, तो $\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$ का मान ज्ञात करो ?

(संकेतः अंश तथा हर को $\cos^2\theta$से भाग देवे)

(3) तृतीय सर्वसमिका–

प्रथम सर्वसमिका $\sin^2\theta + \cos^2\theta =1$ के प्रत्येक पद मे $\sin^2\theta$ का भाग देने पर

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

या

$$\boxed{1+ \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta}$$

Ex 1 $(\sin A + \text{cosec } A)^2 + (\cos A+ \sec A)^2 = 7+ \tan^2 A + \cot^2 A$

बाया पक्ष $(\sin A +\text{cosec } A)^2 + (\cos A + \sec A)^2$

$\underline{\sin^2 A} + 2 \sin A \text{ cosec } A+ \text{cosec}^2 A + \underline{\cos^2 A}+2\cos a.\sec a+\sec^2 a$

$\sin^2 a+\cos^2 a=1$ रखें तथा $\sec^2 a$ के स्थान पर $1+\tan^2$ रखें । $\sin A \times \text{cosec}A = 1$ रखें ।

$\text{Cosec}^2 a = 1+ \cot^2 a$ का प्रयोग करने पर बायां पक्ष $=1+2(1) +1+ \cot^2 a+2(1)+1+\tan^2 a$

$= 7+ \tan^2 a+\cot^2 a =$ दायां पक्ष

Ex 2 सिद्ध करो : $\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$

(**संकेत** : पहले बाएं पक्ष के प्रत्येक पद को Cos θ से विभाजित करके फिर सर्वसमिका $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ का प्रयोग करें। इसमें अंश के 1 के स्थान पर (sec θ +tan θ) (sec θ +tan θ) लिखे, हर में आये 1 को न बदलें)

Ex 3 सिद्ध करो : $\frac{\cos a - \sin a + 1}{\cos a + \sin a - 1}$ = cosec a+cot a

बायें पक्ष में प्रत्येक पद को पहले sin a से विभाजित करे –

$$\frac{\frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\sin a}{\sin a} + \frac{1}{\sin a}}{\frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\sin a}{\sin a} - \frac{1}{\sin a}} = \frac{cot a - 1 + cosec a}{cot a + 1 - cosec a}$$

अब केवल अंश में आये 1 के स्थान पर (coseca+cota) (coseca-cota) का प्रयोग करें। (तृतीय सर्वसमिका)

$$\frac{\text{cot A+cosec A} - \{(cosec\ A + \cot A)\ (cose\ A - cotA\}}{\text{cot A} - \text{cosec A} - 1}$$

$$\frac{(\text{cot A+ cosec A})[1 - \{(cosec\ A - \cot A)\}]}{\text{cot A- cosec A +1}}$$

$$\frac{(\text{cot A +cosec A}) (1-\text{cosec A + cot A})}{(\text{cot A} - \text{cosec A +1})}$$

(cot A +cosec A) = **दायां पक्ष**

Q 1 निम्नांकित का मान ज्ञात करें :-

(i) $2\sin^2\theta \tan 60 - 3\cos^2 60 \sec^2 30$

(ii) $3\cos^2\theta\ 30 + \sec^2 30 + 2\cos 0 + 3\sin 90 - \tan^2 60$

(iii) $4\cot^2 45 - \sec^2 60 + \sin^2 60 + \cos^2 90$

Q 2

सिद्ध करो $\frac{\cos 30 + \sin 60}{1 + \cos 60 + \sin 30} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Q 3 निम्नांकित में प्रत्येक में θ का मान ज्ञात करें ।

(i) $2\sin 2\theta = \sqrt{3}$ (ii) $2\cos 3\theta = 1$ (iii) $\sqrt{3}\tan 2\theta - 3 = 0$

Q 4 निम्नांकित में प्रत्येक में x का मान ज्ञात करें ।

(i) tan 3x = sin 45 cos 45 + sin 30

(ii) sin 2x = sin 60 cos 30 – cos 60 sin 30

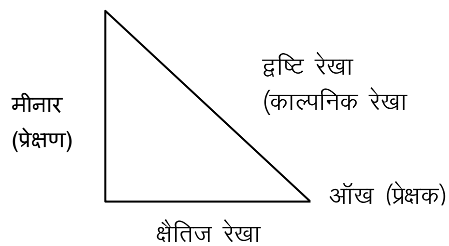
Q 5 यदि θ न्यून कोण है तथा sin θ=cos θ, तो $2\tan^2\theta + \sin^2\theta - 1$ का मान ज्ञात करो।

CHAPTER -9
ऊँचाई व दूरी (Height & Distance)

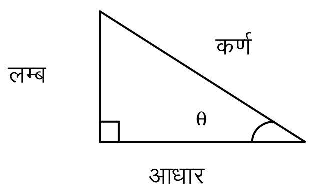
त्रिकोणमिति के अनुप्रयोग

किसी मीनार, मंदिर, खंभे या पेड की ऊँचाई या हम इनसे कितनी दूरी पर खडे है को ज्ञात करने में इसका (त्रिकोणमिती) का उपयोग किया जाता है इसलिए इसका दैनिक जीवन मे अत्यधिक महत्व है।

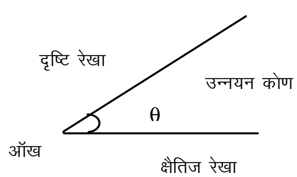
1. यहॉ हम एक मीनार की बात कर रहे है। जो जमीन पर हमेशा उर्ध्वाधर रहेगी और 90^0 के अंश का कोण बनाते हुए रहेगी।
2. एक बिन्दु लेते है जहॉ से ऑख इस मीनार की चौडाई को देख रही है।
3. ऑख से मीनार की चोटी तक एक रेखा बनती है जिसे दृष्टि रेखा या काल्पनिक रेखा कहते है।
4. ऑख से मीनार के पाद तक भी एक सीधी रेखा बनती है जिसे क्षैतिज रेखा कहते है।



4. समकोण त्रिभुज में

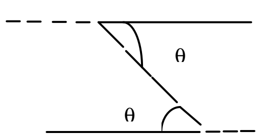


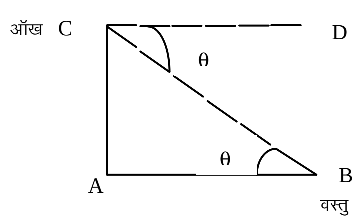
5. उन्नयन कोण – जब कोई वस्तु हमारी ऑख (नयन) से ऊपर हो तो हमे उसे देखने के लिए अपने नयन को ऊँचा करना पडता है। अर्थात् ऊँचे नयन या उन्नयन । इस प्रकार क्षैतिज रेखा और दृष्टि रेखा से बनने वाले कोण को उन्नयन कोण कहते है।



अवनमन कोण – जब हम किसी ऊँचाई पर बैठकर नीचे रखी गयी किसी वस्तु को देखते है तो हमारी ऑखे नीचे झुकी होती है अर्थात् नमन होती है तो इस प्रकार से बनने वाले कोण को अवनमन कोण कहते है।

नोट– दो समान्तर रेखाओ को एक तिर्यक रेखा काटती है तो एकान्तर कोण बनते है।





दूसरे शब्दो मे – जब नयन ऊपर है तो उन्नयन कोण

जब नयन नीचे है तो अवनमन कोण

नोट– इस प्रकार के प्रश्नो को हल करने के लिए सर्वप्रथम चित्र बनाए
(ऊँचाई–दूरी) (समकोण त्रिभुज)

प्रश्न–1 1.5 मीटर लम्बा एक प्रेक्षक एक चिमनी से 28.5 मी. की दूरी पर है। उसकी ऑखो से चिमनी के शिखर का उन्नयन कोण 45^0 है। चिमनी की ऊॅचाई बताइये।

हल– CE = चिमनी

AD = प्रेक्षक

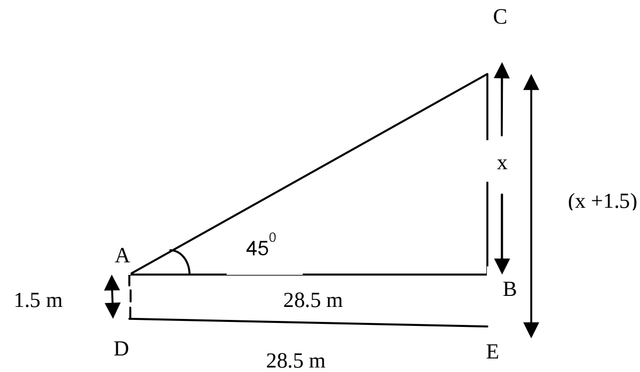
CE = $(x + 1.5)\ m$

BC = $x\ \ m$

DE = $28.5\ \ m$

$AB = DE = 28.5$

$tan\theta = \frac{\text{लं०}}{\text{आ०}}$



$tan\theta = \frac{X}{28.5}$

$tan\ 45^0 = \frac{X}{28.5}$

$1 = \frac{X}{28.5}$

$x = 28.5$

CE= x + 1.5 (x का मान रखने पर)
= 28.5 + 1.5
=30.0 = 30 m

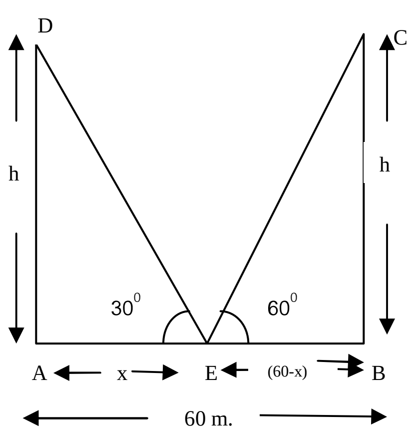
प्रश्न–2 एक 60 मी. चौडी सडक के दोनो और समान ऊॅचाई की दो मीनारे है दोनो मीनारो के बीच सडक के एक बिन्दु से मीनार के शिखर के उन्नयन कोण कमशः 60^0 व 30^0 है। खंभो की ऊॅचाई व खंभो के मध्य दूरी ज्ञात करो।

हल– $\angle$ AED = 30^o $\angle$ BEC = 60^o

AD =BC=h

AE= x मी. BE= (60-x) मी.

समकोण $\triangle$ ADE में



$tan\ 30^0 = \frac{AD}{AE}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x}$

$h = \frac{x}{\sqrt{3}}\ \ m. \quad ----(1)$

पुनः समकोण $\triangle$ BEC में

$tan\ 60^0 = \frac{BC}{BE} = \frac{h}{60-x}$

$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h}{60-x}$

$h = (60 - x)\sqrt{3} \quad ----(2)$

समीकरण 1 एवं 2 से

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = (60 - x)\sqrt{3}$$

$$x = (60 - x)\,X\,3$$

$$x = 180 - 3x$$

$$x + 3x = 180$$

$$4x = 180$$

$$AE = x = \frac{180}{4} = 45\,m. - - - - (3)$$

$$BE = 60 - x = 60 - 45 = 15\,m.$$

समीकरण 3 का मान समीकरण 1 मे रखने पर

$$h = \frac{45}{\sqrt{3}}$$

हर का परिमेय करण करने पर

$$h = \frac{45}{\sqrt{3}}\,X\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{45\sqrt{3}}{3}$$

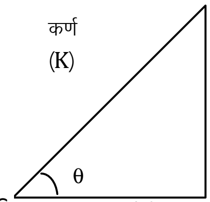
$$= 15\sqrt{3} = 15\,X\,1.732$$

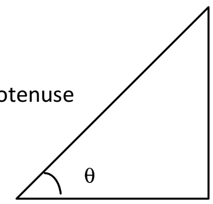
$$= 25.98\,m.$$

सारांश

1. त्रिकोण मितीय अनुपातो को याद करने की ट्रिक

Sin	Cos	Tan
L	A	L
K	K	A
Cosec	Sec	Cot





1. Sin θ = $\frac{Opp}{Hyp}$
2. Cos θ=$\frac{Base\ (Adj)}{Hyp}$
3. Tan θ= $\frac{Opp}{adj}$
4. Sin (angle you are looking from) = $\frac{Length\ of\ opp\ side}{Length\ of\ Hyp.}$

   Sin A = $\frac{BC}{AC}$ तथा Sin C = $\frac{AB}{AC}$
5. यदि पूरक कोण हो तो ऐसे प्रश्नो में किसी एक कोण को ही बदले।
6. प्रश्नों को हल करते समय सभी अनुपातो में से Sin θ व Cos θ को छोडकर शेष सभी अनुपातो को Sin θ व Cos θ मे बदलने का प्रयास करे।
7. ऊँचाई एवं दूरी के प्रश्नो को हल करते समय
   a. मीनार/दीवार/चिमनी/खम्भा/पेड/ऊर्ध्वाधर ऊँचाई आदि को लम्ब के रूप मे ले।
   b. लम्बवत खडी वस्तु की छाया तथा क्षैतिज दूरी को आधार के रूप मे ले।
   c. प्रश्न मे यदि तार की लम्बाई, वायुमान की हवाई अड्डे से सीधी दूरी, सीढी की लम्बाई, पतंग की डोरी की लम्बाई आदि को हमेशा "कर्ण" लें।

CHAPTER -10

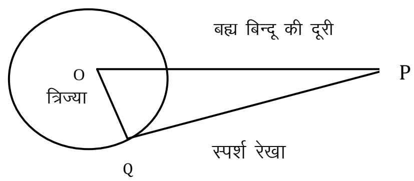
ज्यामिति (वृत्त)

स्मरणीय बिन्दुः

1.वृत की स्पर्श रेखा उसे कितने बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है।(एक)
2.वृत की दो बिन्दुओ पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को कहते है।(छेदक रेखा)
3.एक वृत के व्यास पर कितनी समान्तर स्पर्श रेखाऐं हो सकती है। (दो)
4. बाह्य बिन्दु से खींची गई दोनों स्पर्श रेखाऐं लम्बाई में होती है।(बराबर)
5. बाह्य बिन्दु से वृत पर कितनी स्पर्श रेखाऐं खींची जा सकती है।(दो)
6.स्पर्श रेखा व त्रिज्या स्पर्श बिन्दु पर कोण बनाती है।(90')

<u>स्पर्श रेखा की लम्बाई/त्रिज्या/बाह्य बिन्दु की दूरी ज्ञात करना</u>।

इसे पाइथोगोरस प्रमेय (कर्ण^2=आधार^2+लम्ब^2) की सहायता से हल करते है।
बाह्य बिन्दु से दूरी हमेशा कर्ण होगी।



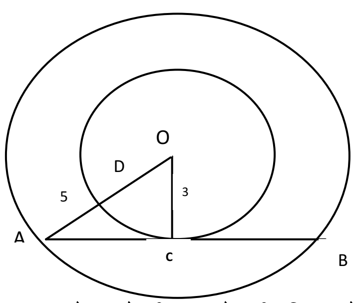
$$op^2 = oq^2 + pq^2$$

प्रश्न01) 5 समी त्रिज्या वाले एक वृत के बिन्दु p पर स्पर्श रेखा pq केन्द o से जाने वाली एक रेखा से बिन्दु q पर इस प्रकार मिलती है कि oq=12। pq की लम्बाई है।

प्रश्न02) एक बिन्दु Q से एक वृत पर स्पर्श रेखा की लम्बाई 24 सेमी तथा Q की केन्द्र से दूरी 25 सेमी है तो वृत की त्रिज्या है।

संकेन्द्रीय वृत आधारित प्रश्नः–

छोटे वृत की स्पर्श रेखा, बडे वृत की जीवा होगी। स्पर्श बिन्दु उसे समाद्विभाजित करेगा। आगामी चरणों में पाईथोगोरस प्रमेय का प्रयोग कर प्रश्न हल किया जायेगा।



AB=2AC

$$OA^2=AC^2+OC^2$$

$$5^2=AC^2+3^2 ,$$

$$AC= \sqrt{16} =4cm,$$

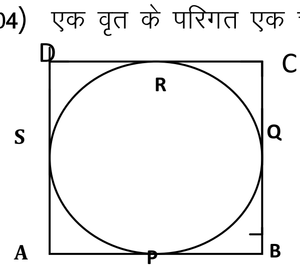
AB=2AC =8cm

प्रश्न03) दो संकेन्द्रीय वृतों की त्रिज्याऐं 5 सेमी तथा 3 सेमी हैं। बडे वृत की जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए जो छोटे वृत को स्पर्श करती है।

बाह्य बिन्दु से स्पर्श रेखा की लम्बाई समान आधारित प्रश्नः–

एक ही बिन्दु से स्पर्श रेखाओं की तुलना व उनकी लम्बाई समान लिखकर चरणबद्ध प्रश्न हल करना।

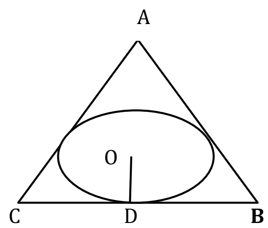
प्रश्न04) एक वृत के परिगत एक चतुर्भुज खीचा गया है। सिद्ध कीजिएः– AB +CD = AD + BC



AP,BP,DR,CR को LHS में रखना है।

AS,BQ,DS,CQ को RHS में रखना है।

प्रश्न05) 4– सेमी त्रिज्या वाले एक वृत के परिगत एक त्रिभुज ABC इस प्रकार खींचा गया है कि रेखाखण्ड BD और DC की लम्बाईयॉ क्रमश 8 सेमी और 6 सेमी है। AB और AC ज्ञात करो।



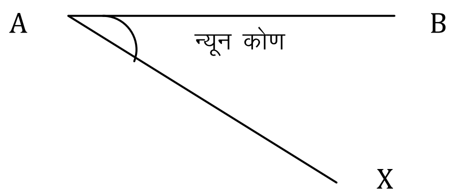
CHAPTER -11

ज्यामिति (रचनाएँ)

रेखाखण्ड का विभाजन (दिये गये अनुपात में)

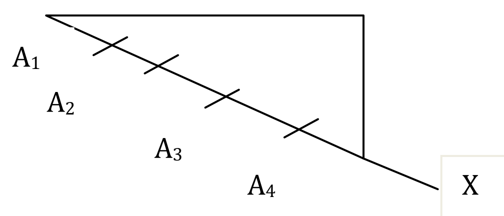
रचना के चरण (संकेत) अनुपात माना 1:3

1. रेखाखण्ड खींचकर न्यून कोण (नीचे की ओर) की रचना

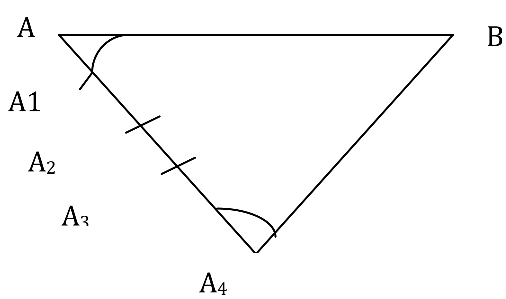


2. दिये गये अनुपातों का योग करके समान दूरी पर बिन्दु बनाना (निश्चित दूरी का परकार खोलकर बार–बार चाप के दोहरान से)

अन्तिम बिन्दु को **B** से मिलाना



3. दिये गये अनुपात की पहचान हेतु गिनकर बिन्दु की पहचान करना जो दिये गये अनुपात को प्रदर्शित करता है।
4. उस बिन्दु से BA_4 के समान्तर रेखा
   1. A_4 से A_3 के समान परकार खोलकर चाप काटना।
   2. उतना ही चाप A_1 से बनाना।
   3. A_3 से रेखा BA_4 के प्रतिच्छेद बिन्दु के बराबर परकार खोलना।
   4. उतना ही चाप A_1 से काटना व प्रतिच्छेद बिन्दु को A_1 से मिलाकर आगे बढाना जो कि AB को C पर प्रतिच्छेद करना।
   5. C,AB को 1:3 में विभाजित करेगा।



महत्वपूर्ण प्रश्न – 7.1 सेमी का रेखाखण्ड खींचकर उसे 2:3 में विभाजित कीजिए।

दिये गये त्रिभुज के संगत त्रिभुज की रचना :–

दो प्रकार के प्रश्न :–

(अ.) भिन्न/अनुपात से छोटा (अंश छोटा व हर बड़ा) $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{7}$ आदि
नया त्रिभुज पूर्व के अन्दर बनेगा अर्थात छोटा होगा। (बड़े अंक वाले बिन्दु को मिलाना व बाद में छोटे भाग पर रचना)

(ब.) भिन्न अनुपात 1 से बड़ा (अंश बड़ा व हर छोटा) $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$ $\frac{7}{4}$ आदि
नया त्रिभुज पूर्व के बाहर बनेगा अर्थात बड़ा होगा। (छोटे भाग को पहले अंतिम बिन्दु से मिलाना है व बाद में बड़े भाग पर रचना)

क्रियाविधि के चरण

1. सर्व प्रथम नाप के आधार पर त्रिभुज की रचना।
2. आधार के एक बिन्दु के नीचे की ओर न्यूनकोण की रचना।
3. आवश्यकता समान दूरी पर बिन्दु BX पर बनाना।
4. अनुपात व बिन्दु (अ) व (ब) की शर्त के अनुसार बिन्दु (छोटा या बड़े भाग) को C से मिलाना ।
5. बिन्दु (अ) व (ब) के अनुसार दूसरे बिन्दु से समान्तर रेखा की रचना जो कि त्रिभुज की एक भुजा आधार को प्रतिच्छेद करेगी।
6. उस बिन्दु से पुनः त्रिभुज की दूसरी भुजा के समान्तर रेखा की रचना जो कि त्रिभुज की तीसरी भुजा को प्रतिच्छेद करेगी।
7. इस प्रकार संगत त्रिभुज की रचना होगी।

महत्वपूर्ण प्रश्न :–

1. 4cm 5cm, और 6cm भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर इसके समरूप एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाऐं दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{2}{3}$ गुनी हो।
2. एक त्रिभुज ABC बनाइए, जिसमें BC=7cm, LB=45^0, LA = 105^0 हो। फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाऐं $\triangle$ ABC की संगत भुजाओं की $\frac{4}{3}$ गुनी हो।

बाह्य बिन्दु से स्पर्श रेखा की रचना करना।

1. प्रश्न में वृत की त्रिज्या व केन्द्र से बिन्दु की दूरी दी गई होगी।
2. दो स्पर्श रेखाऐं खीची जा सकती है।
3. स्पर्श रेखाऐं लम्बाई में समान होगी।

रचना के चरण

1. सर्वप्रथम दी गई त्रिज्या के वृत की रंचना।
2. केन्द्र से दी गई दूरी पर बिन्दु बनाकर केन्द्र से मिलाना।
3. OP का लम्ब समद्विभाजक खीचकर दोनो प्रतिच्छेदी बिन्दुओं को केन्द्र मानकर वृत की रचना जो केन्द्र व बाहय बिन्दु से होकर गुजरेगा।
4. दोनो वृत दो बिन्दुओ पर प्रतिच्छेद करेगें।
5. इन्हें बाहय बिन्दु से मिला देंगें।
6. इस प्रकार दो स्पर्श रेखाऐं बनेगी।
7. दोनो की लम्बाई नापेंगे जो समान होगी उसे लिखेगें।

महत्वपूर्ण प्रश्न :–

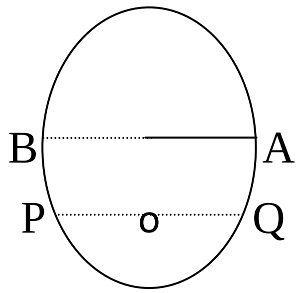
एक AB रेखा 7 सेमी की खीचो इसके बिन्दु B पर 3 सेमी त्रिज्या का वृत खीचो तथा बिन्दु A से इस वृत पर दो स्पर्श रेखाओ की रचना करो। स्पर्श रेखाओ की लम्बाई लिखो तथा गणना द्वारा सिद्व करो।

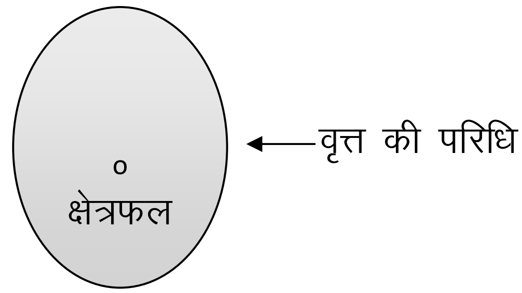
CHAPTER -12

वृत्त से सम्बन्धित क्षेत्रफल (Menstruation)

1. वृत्त सम्बन्धित क्षेत्रफलः–

   (a) वृत्त के भागः–





O ⟶ वृत्त का केन्द्र

OA ⟶ वृत्त की त्रिज्या $= r$

OB ⟶ वृत्त की त्रिज्या $= r$

AB ⟶ वृत्त का व्यास $=OA+OB$

$= r+r$

$=2r$

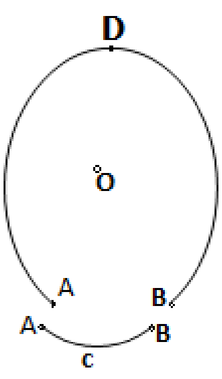
व्यास = 2 x त्रिज्या

छायांकित भाग ⟶ क्षेत्रफल

वृत्त की परिधि $= 2\pi r$

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

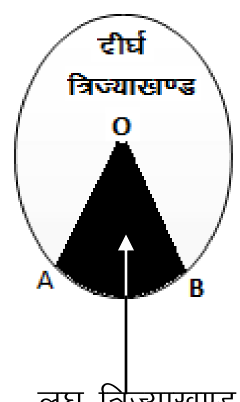
यहाँ $\pi = \frac{22}{7}$ या $=3.14$



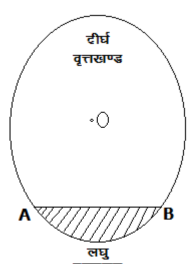
परिधि के भाग (टुकड़े) चाप कहलाते है।

चाप A C B ⟶ लघु चाप

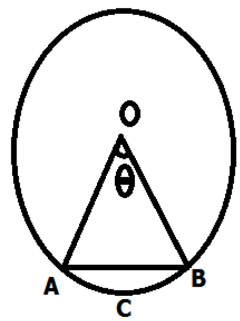
चाप A D B ⟶ दीर्घ चाप



लघु त्रिज्याखण्ड
(क्षेत्रफल का भाग)



महत्त्वपूर्ण सूत्रः–



(i) वृत्त के चाप A C B की लम्बाई = वृत्त की परिधि $\times \frac{\theta}{360^\circ}$

$$= 2\pi r \quad \frac{\theta}{360^\circ}$$

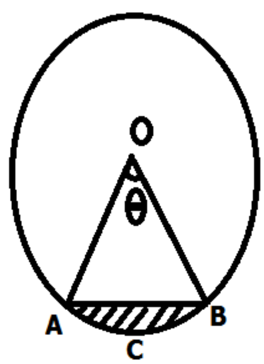
(ii) वृत्त के दीर्घ चाप की लम्बाई = वृत्त की परिधि – लघु चाप की लम्बाई

(iii) वृत्त के लघु त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल

= वृत्त का क्षेत्रफल$\times \frac{\theta}{360^\circ}$

$$= \pi r^2 \frac{\theta}{360^\circ}$$

(iv) वृत्त के दीर्घ त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल = वृत्त की क्षेत्रफल – लघु त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल



(v) वृत्त वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल = त्रिज्याखण्ड AOBCA का क्षेत्रफल–Δ AOB का क्षेत्रफल

$$= \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta$$

(vi) दीर्घ वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल=वृत्त की क्षेत्रफल–लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

नोटः–

1. वृत्त का चतुर्थांश वृत्त का एक त्रिज्याखण्ड होता है जिसका कोण $\theta = 90^\circ$ होता है।

2. घड़ी की सुई के प्रश्नों में सुई की लम्बाई वृत्त की त्रिज्या r के स्थान पर लेंगे।
3. यदि घड़ी की सुई मिनट की सुई है तो कोण $\theta = 6' \times$ समय
4. यदि घड़ी की सुई घण्टे की सुई है तो कोण $\theta = \frac{1'}{2} \times$ समय
5. वृत्ताकार पहिये द्वारा लगाये गए 1 चक्कर की लम्बाई

    = पहिये की परिधि

    $= 2\pi r$
6. पहिये द्वारा तय की गई दूरी = चक्करो की संख्या X परिधि
7. पहिये द्वारा लगाये चक्करों की संख्या = $\frac{\text{तय की गई दूरी}}{2\pi r}$

नोटः– सभी सूत्र याद करने है जो कि परीक्षा में पूछा जा सकता है एवं 1 अंक का होता है।

प्रश्नः– यदि वृत्त का क्षेत्रफल 154 वर्ग सेमी है तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हलः– माना कि वृत्त की त्रिज्या $= r$

प्रश्नानुसार,

$$\pi r^2 = 154$$

$$\frac{22}{7} \times r^2 = 154$$

$$r^2 = \frac{154 \times 7}{22}$$

$$r^2 = 7 \times 7$$

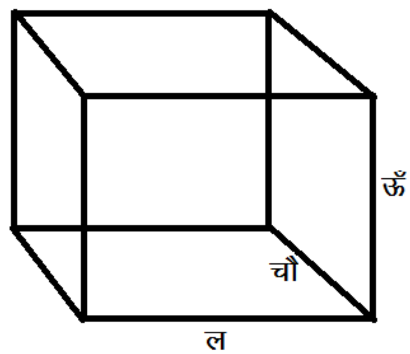
$$r^2 = 7^2$$

$$r = 7\ cm$$

CHAPTER -13

पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन

घनाभः–



(a) घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल

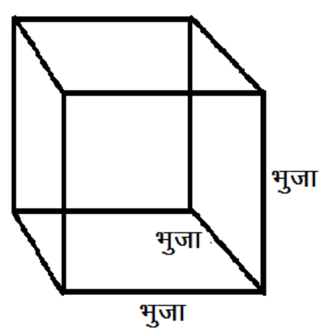
= 2 X ल. X चौ. + 2 X चौ. X ऊँ. + 2 X ऊँ. X ल.

= 2 X (ल. X चौ. + चौ. X ऊँ. + ऊँ. X ल.)

(b) घनाभ का आयतन = आधार का क्षेत्रफल X ऊँचाई

= (लम्बाई X चौड़ाई) X ऊँचाई

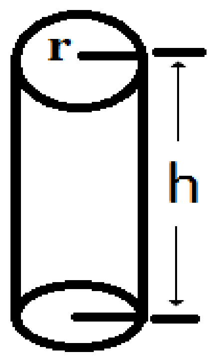
2. घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतनः–



(a) घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 6 X (भुजा)^2

(b) घन का आयतन = भुजा X भुजा X भुजा

3. बेलनः–



$r \rightarrow$ बेलन की त्रिज्या

$h \rightarrow$ बेलन की ऊँचाई

(a) बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल = आधार की परिधि x ऊँचाई

$= 2\pi r \times h$

(b) बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

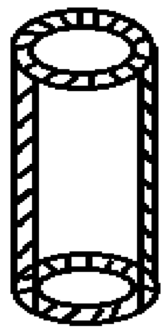
= वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल + 2 x वृत्त का क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r(h + r)$

(c) बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल x ऊँचाई $= \pi r^2 \times h$

(d) खोखले बेलन का आयतन



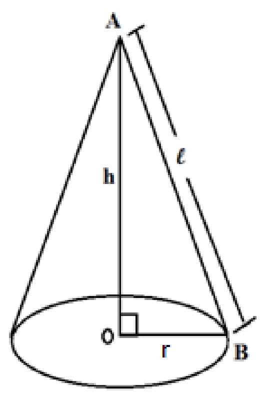
= बाहरी बेलन का आयतन – अन्तः बेलन का आयतन

$= \pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h$

जहाँ r_1 = बाहरी बेलन की त्रिज्या

r_2 = अन्तः बेलन की त्रिज्या

4. शंकुः–



$h \rightarrow$ शंकु की ऊँचाई

$l \rightarrow$ शंकु की तिर्यक ऊँचाई

$r \rightarrow$ शंकु के आधार की

(a) शंकु की तिर्यक ऊँचाई $= l$

समकोण $\Delta\, AOB$ में,

पाईथोगोरस प्रमेय से,

$$AB^2 = OA^2 + OB^2$$

$$l^2 = h^2 + r^2$$
$$l = \sqrt{h^2 + r^2}$$

(b) शंकु के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल= $\pi r l$

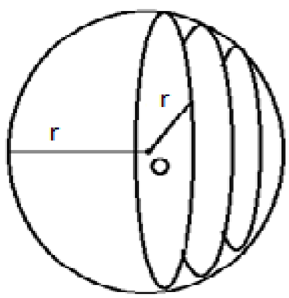
(c) शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

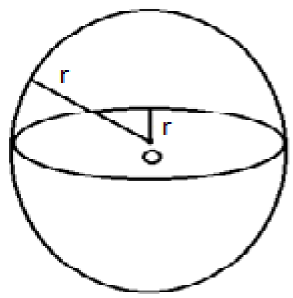
= वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल

$$= \pi r l + \pi r^2$$
$$= \pi r(l + r)$$

(d) शंकु का आयतन= $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

5. गोलाः–

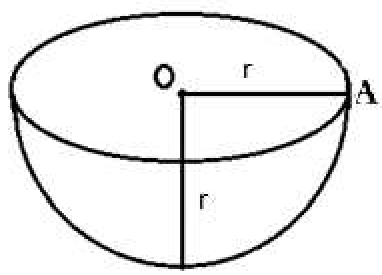




r → गोले की त्रिज्या

(a) गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल= $4\pi r^2$

(b) गोले का आयतन= $\frac{4}{3}\pi r^3$



(c) अर्द्धगोले के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल= $2\pi r^2$

(d) अर्द्धगोले का सम्पूर्ण वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल

=अर्द्धगोले का वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल+आधार का क्षेत्रफल

$= 2\pi r^2 + \pi r^2$

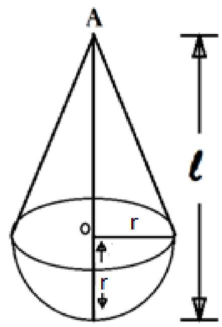
$= 3\pi r^2$

(e) अर्द्धगोले का आयतन= $\frac{2}{3}\pi r^3$

(f) खोखले गोले का आयतन = बाहरी गोले का आयतन – अन्तः गोले का आयतन

ठोसों का संयोजनः–

प्रश्नः– एक खिलौना त्रिज्या 3.5 cm वाले एक शंकु के बराबर का है, जो उसी त्रिज्या वाले एक अर्द्धगोले पर अध्यारोपित है। इस खिलौने की सम्पूर्ण ऊँचाई 15.5 cm है। इस खिलौने का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हलः– शंकु की त्रिज्या r = अर्द्धगोले की त्रिज्या r

= 3.5 cm

खिलौने की ऊँचाई AB =13.5 cm

शंकु की ऊँचाई AO = AB-OB

या h =13.5- 3.5

या h =12 cm

शंकु की तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

$= \sqrt{12^2 + 3.5^2}$

$= \sqrt{144 + 12.25}$

$= \sqrt{156.25}$

$= 12.5\, cm$

∴ खिलौने में शंकु तथा अर्द्धगोला सम्मिलित है

अतः खिलौने पृष्ठीय क्षेत्रफल

= शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल अर्द्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= \pi r l + 2\pi r^2$

$= \pi r (l + 2r$

$= \frac{22}{7} \times 3.5 \times [12.5 + 2 \times 3.5]$

$= \frac{22}{7} \times 3.5 \times [12.5 + 7]$

$$= \frac{11 \times 195}{10} \qquad = \frac{2145}{10} \qquad = 214.5 \text{ cm}^2$$

<u>एक ठोस का दूसरे ठोस में रूपान्तरणः–</u>

प्रश्नः– व्यास 7M वाला 20 M गहरा एक कुआं खोदा जाता है और खोदने से निकली मिट्‌टी को समान रूप से फैलाकर 2M X 14M वाला एक चबुतरा बनाया गया। इस चबुतरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

∴ यहाँ बेलनाकार कुँए द्वारा निकाली गई मिट्‌टी द्वारा एक घनाभाकार चबुतरा बनाया जाता है।

∴ चबुतरे का आयतन = बेलनाकार कुँए का आयतन

हल :

मानाकि चबुतरे की ऊँचाई = h मीटर

चबुतरे की लम्बाई l = 22 मीटर

चबुतरे की चौड़ाई b= 14 मीटर

कुँए की गहराई H = 20 मीटर

कुँए का व्यास = 7 मीटर

∴ कुँए की त्रिज्या $r = \frac{7}{2}$ मीटर

∴ कुँए की निकाली गई मिट्‌टी से चबुतरा बनाया जाता है।

∴ चबुतरे का आयतन = बेलनाकार कुँए का आयतन

या ल X चौ X ऊँ = $\pi r^2 H$

या $l \times b \times h = \pi r^2 H$

या $h = \frac{\pi r^2 H}{l \times b}$

या $h = \frac{22 \times 7 \times 7 \times 20}{7 \times 2 \times 7 \times 22 \times 14}$

या $h = \frac{5}{2}$ मीटर

Trick: जिस ठोस आकृति में कोई चर राशि ज्ञात करनी है, उसके आयतन का सूत्र “=” के चिह्‌न से पहले लिखना है।

CHAPTER -14

सांख्यिकी

सांख्यिकी

1. समांतर माध्य
2. माध्यक
3. बहुलक

निम्न प्रश्न से हम समांतर माध्य,बहुलक,माध्यक निकालना सीखेगें।

प्रश्न 1.

वर्ग अन्तराल	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
बारम्बारता	5	3	7	2	3

1. समांतर माध्य निकालना :–

- इसके लिए सर्वप्रथम वर्ग वाले स्तंभ के संगत मध्य मान x निकाले,

  उदाहरण :– 0–10 वाले वर्ग के लिए $x = \frac{0+10}{2} = 5$

  30–40 वाले वर्ग के लिए $x = \frac{30+40}{2} = 35$

- इसके बाद $f_i x_i$ वाला स्तंभ बनाए [f और x वाले स्तंभ का गुणा करके]
- सूत्र $\bar{x} = \frac{\Sigma fixi}{\Sigma fi}$ का उपयोग करें।

वर्ग अंतराल	बारम्बारता	मध्यमान	$f_i x_i$
0–10	5	5	25
10–20	3	15	45
20–30	7	25	175
30–40	2	35	70
40–50	3	45	135
योग	$\Sigma f_i=20$		$\Sigma f_i x_i=450$

Σf_i से तात्पर्य =f वाले स्तंभ का योग।

$\Sigma f_i x_i$ से तात्पर्य =fx वाले स्तंभ का योग।

समांतर माध्य $(\bar{x}) = \frac{\Sigma fixi}{\Sigma fi} = \frac{450}{20} = \frac{45}{2} = 22.5$

समांतर माध्य $(\bar{x}) = 22.5$ उत्तर

---

2. माध्यक

- इसके लिए सर्वप्रथम **cf** (संचयी बारम्बारता) का स्तंभ बनाए।
- (प्रत्येक **f** वाले खण्ड के संगत **cf** का मान = उस पंक्ति **f** का योग $\Sigma f_i = N$ माने (बारम्बारता वाले स्तंभ का योग)
- $\frac{N}{2}$ के बराबर या इससे ठीक बड़े मान के संगत वर्ग को माध्यक–वर्ग माना जाता है।
- सूत्र माध्यक $M = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - Cf}{f}\right) \times h$

वर्ग अंतराल	बारम्बारता (f_i)	संचयी बारम्बारता (cf)
0–10	5	5
10–20	3	5+3 =8
20–30	7	8+7=15
30–40	2	15+2=17
40–50	3	17+3=20
	N=20	

सूत्र माध्यक $M = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - Cf}{f}\right) \times h$

जहां l = माध्यक वर्ग 20–30 की निम्न सीमा = 20

f = माध्यक वर्ग 20–30 की बारम्बारता = 7

cf = माध्यक वर्ग 20–30 से ठीक पहले की संचयी बारम्बारता = 8

h = वर्ग अंतराल = माध्यक वर्ग की लम्बाई 30–20= 10

सूत्र में मान रखने पर $M = 20 + \left(\frac{10-8}{7}\right) \times 10$

$$= 20 + \left(\frac{2}{7}\right) \times 10$$

$$= 20 + \left(\frac{2 \times 10}{7}\right)$$

$$= 20 + \frac{20}{7}$$

$$= 20 + 2.85$$

M= 22.85

योग

```
  20.00
+  2.85
-------
  22.85
```

3. बहुलक (Z)

- सबसे अधिक बारम्बारता (t) के संगत वर्ग,बहुलक वर्ग कहलाता हैं।
- सूत्र बहुलक (Z) $= l + [\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}] \times h$

वर्ग	बारम्बारता
0–10	5
10–20	3 → f_0
l (20) –30	7 → f_1
30–40	2 → f_2
40–50	3

बहुलक वर्ग

सर्वाधिक बारम्बारता f = 7 के संगत वर्ग 20–30 बहुलक वर्ग होगा।

- बहुलक (Z) $= l + [\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}] \times h$

यहां l= बहुलक वर्ग 20–30 की निम्न सीमा = 20

f_1= बहुलक वर्ग की बारम्बारता = 7

f_0 = बहुलक वर्ग से ठीक पहले वाले वर्ग की बारम्बारता = 3

f_2 = बहुलक वर्ग के ठीक बाद वाले वर्ग की बारम्बारता = 2

h = वर्ग–अंतराल = 10

मान रखने पर

→ बहुलक Z $= 20 + [\frac{7-3}{2\times7-3-2}] \times 10$

$= 20 + [\frac{4}{14-5}] \times 10$

$= 20 + [\frac{4}{9}] \times 10 = 20 + [\frac{4 \times 10}{9}]$

$= 20 + \frac{40}{9}$

$= 20 + 4.44$

$= 24.44$ (लगभग)

बहुलक (Z) $= 24.44$ उत्तर

योग करने का तरीका

```
  20.00
+  4.44
-------
  24.44
```

CHAPTER -15

प्रायिकता (Probability)

- प्रायिकता से तात्पर्य किसी प्रयोग में किसी विशिष्ट परिणाम (घटना) के होने की संभावना।
- सूत्र प्रायिकता P(E) = $\dfrac{\text{E के अनूकूल परिणामों की संख्या}}{\text{प्रयोग के कुल परिणामों की संख्या}}$
- यदि किसी घटना E के घटित होने की प्रायिकता = P(E)
- तो घटना E के घटित नहीं होने की प्रायिकता = 1– P (E)
- किसी घटना E के लिए

$O \leq P\ (E) \leq 1$ जहां निश्चित घटना के लिए P(E) = 1

अनिश्चित घटना के लिए P(E) = 0

उदारहण :– एक सिक्के को उछालने पर सिक्के पर

1. चित (H) आने की प्रायिकता–

हलः– अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

कुल परिणामों की संख्या = 2

प्रायिकता = $\dfrac{\text{अनूकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}} = \dfrac{1}{2}$

2. पट आने की प्रायिकता –

हलः– अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

कुल परिणामों की संख्या = 2

प्रायिकता $= \frac{1}{2}$

उदारहणः– एक पासे को फेंका गया,उस पासे पर

1. अंक 2 आने की प्रायिकता

हलः– अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

कुल परिणामों की संख्या = 6

कुल परिणाम = {1,2,3,4,5,6}

$\therefore$ अंक 2 आने की प्रायिकता $= \frac{1}{6}$

2. अभाज्य संख्या आने की प्रायिकता

हल : अनुकूल परिणाम = {2,3,5}

अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

$\therefore$ प्रायिकता $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

3. सम अंक आने की प्रायिकता –

हल : अनुकूल परिणाम = सम अंक = {2,4,6}

अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

$\therefore$ प्रायिकता $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

4. 4 अंक से बड़ा अंक आने की प्रायिकता.

हलः अनुकूल परिणाम $= 4$ से बड़े अंक $= \{5,6\}$

अनुकूल परिणामों की संख्या $= 2$

∴ प्रायिकता $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

5. 7 से छोटा अंक आने की प्रायिकता

हलः अनुकूल परिणाम $= 7$ से छोटे अंक $= \{1,2,3,4,5,6\}$

अनुकूल परिणामों की संख्या $= 6$

∴ प्रायिकता $= \frac{6}{6}\ 1$ (निश्चित घटना)

NOTE : पासे को फेंकने पर उस पर प्राप्त अंक हमेशा 7 से छोटा अंक ही होता है।

6. 6 से बड़ा अंक आने की प्रयिकता

हलः अनुकूल परिणामों की संख्या $= 0$

∴ प्रायिकता $= \frac{0}{6} = 0$ (अनिश्चित घटना)

NOTE : पासे पर 6 से बड़ा अंक आना संभव नहीं है।

प्रश्न :– किसी थैले में 3 काली और 2 लाल गेंद है, यदि उस थैले में से एक गेंद निकाली गई तो उस गेंद के :–

1. काली गेंद होने की प्रायिकता –

अनुकूल परिणाम = काली गेंदो की संख्या $= 3$

अनुकूल परिणामों की संख्या $= 3$

कुल परिणाम = कुल गेंदो की संख्या = 3+2 $= 5$

∴ गेंद के काली होने की प्रायिकता $= \frac{3}{5}$

2. लाल गेंद होने की प्रायिकता –

हल अनुकूल परिणामों की संख्या = लाल गेंदो की संख्या $= 2$

∴ लाल गेंद होने की प्रायिकता $= \frac{2}{5}$

3. लाल गेंद नहीं होने की प्रायिकता.

हल : लाल गेंद होने की प्रायिकता $P(R) = \frac{2}{5}$

लाल गेंद नही होने की प्रायिकता $P(\overline{R})$

$= 1 - \frac{2}{5} = \frac{5-2}{5} = \frac{3}{5}$

वैकल्पिक :– लाल गेंद नही होने की प्रायिकता से तात्पर्य काली गेंद होने की प्रायिकता $= \frac{3}{5}$

4. सफेद गेंद होने की प्रायिकता

अनुकूल परिणाम $=$ **सफेद गेंदो की संख्या** $= 0$

$\therefore$ **प्रायिकता** $= \frac{0}{5} = 0$

5. थैले में से एक गेंद निकाल ली जाए और उसे पुनः थैले में ना रखा जाय, यदि निकाली गई गेंद लाल है, तो अगली गेंद के काली गेंद होने की प्रायिकता :–

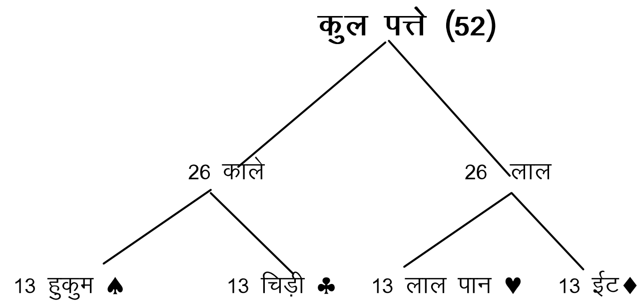
यहां एक गेंद निकालने के पश्चात शेष गेंदो की संख्या $= 5 - 1 = 4$

$\therefore$ **कुल परिणाम** $=$ **शेष बची गेंदो की संख्या** $= 4$

काली गेंद अनुकूल परिणाम $=$ **काली गेंदो की संख्या** $= 2$

$\therefore$ **काली गेंद होने की प्रायिकता** $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

(4) ताश के पत्ते



→ चार SUIT

प्रत्येक SUIT में एक इक्का, बादशाह, बेगम, गुलाम, 10,9,8,7,6,5,4,3,2 है।

उदाहरण 4 :–

1. ताश की एक अच्छी तरह फेंटी गई गड्डी में से एक **पत्ता** निकाला गया, उस **पत्ते** के :–

1. इक्का होने की प्रायिकता

हल : कुल परिणाम $=$ कूल **पत्तों** की संख्या $= 52$

अनुकूल परिणाम $=$ इक्को की संख्या $= 4$

$\therefore$ इक्का होने की प्रायिकता $= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

2. पते के लाल होने की प्रायिकता

हल : अनुकुल परिणाम $=$ लाल **पत्तों** की संख्या $= 26$

$\therefore$ प्रायिकता $= \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

3. काला बादशाह होने की प्रायिकता

अनुकुल परिणाम $=$ काला बादशाह की संख्या $= 2$

$\therefore$ प्रायिकता $= \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

4. बेगम ना होने की प्रायिकता

बेगम होने की प्रायिकता $= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

बेगम नहीं होने की प्रायिकता $= 1 - \frac{1}{13} = \frac{13-1}{13} = \frac{12}{13}$

वैकल्पिक

पता बेगम ना हो अनुकूल परिणाम

$=$ बेगम के अलावा शेष **पत्ते**

$= 52-4 = 48$

$\therefore$ बेगम ना होने की प्रायिकता $= \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

5. चिड़ी का गुलाम होने की प्रायिकता –

हल : अनुकूल परिणाम $=$ चिड़ी के गुलाम की संख्या $= 1$

$\therefore$ प्रायिकता $= \frac{1}{52}$

CHAPTER -16

सड़क सुरक्षा

सड़क सुरक्षा क्या है :–

सड़क सुरक्षा दैनिक जीवन से जुड़ा विषय है। चाहे हम पैदल चलें या वाहन से। इस दौरान हमें क्या सावधानियां बरतनी चाहिए जिससे हमारा और अन्य व्यक्तियों का जीवन सुरक्षित रहें।

छात्रों को इस महत्वपूर्ण विषय के प्रति जागरूक करने के लिए उक्त विषय को पाठ्यक्रम में शामिल किया गया है।

सड़क सुरक्षा संबंधी गणितिय अनुप्रयोग :–

समांतर श्रेढी

प्रश्न – 1 एक कार का जयपुर से दिल्ली तक की 480 कि.मी की दूरी को 60 किमी/घण्टा की औसत चाल से तय करने में कितना समय लगेगा यदि उसे आठ (8) स्थानों पर रूकना पड़े और वो समय क्रमशः 5 मिनट, 9 मिनट व अंतिम आठवें स्थान पर 33 मिनट तक रूके।

उत्तर – कार द्वारा दूरी तय करने में लगा समय $= \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$

समय $= \frac{480}{60} = 8$ घण्टे

विभिन्न स्थानों पर रूकने में लगा समय

5, 9, 13............3 3

कुल समय $= 5 + 9 + 13 + - - - - - - 33$

जो कि एक समांतर श्रेढी है

जिसका प्रथम पद $a = 5$

सार्वअंतर $d = 4$

अंतिम पद $l = 33$

अतः $S_n = \frac{n}{2}[a + l]$

$S_8 = \frac{8}{2}\ [5 + 33]$

$Sn = 4 \times 38 = 152$ मिनट

$= \frac{152}{60}$ घण्टे $= 2$ घण्टे 32 मिनट

कुल समय= 8 घण्टे + 2घण्टे 32 मिनट = 10 घण्टे 32 मिनट

प्रश्न – 2 यदि एक टैक्सी का किराया प्रथम किलोमीटर के लिए 15 रूपये व उसके बाद प्रत्येक किमी. के लिए किराया 4 रूपये के हिसाब से लिया जाता है। किसी व्यक्ति को 7 किमी. चलने के लिए कितना किराया चुकाना होगा।

उत्तर – प्रथम पद $a = 15$

सार्वअंतर $d = 4$

पदों की संख्या $n = 7$

कुल किराया $s_n = \frac{n}{2}\ [2a\ + (n-1)d]$

$s_7 = \frac{7}{2}\ [2 \times 15 + (7-1)4]$

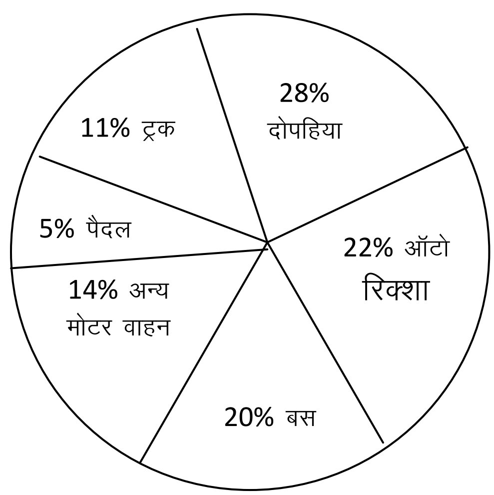
$= \frac{7}{2}\ [30 + 24]$

$= \frac{7}{2} \times 54 = 7 \times 27 =$ रु189

प्रतिशत व सांख्यिकी

1. निम्न पाई चार्ट के अनुसार सड़क दुर्घटना में हुई मौतों का आँकड़ा प्रदर्शित है। यदि वर्ष 2015 में होने वाली कुल मौतें 50000 हो तो–

अ. दोपहिया वाहन से होने वाले मौतें
ब. अन्य वाहनों से होने वाली मौतें

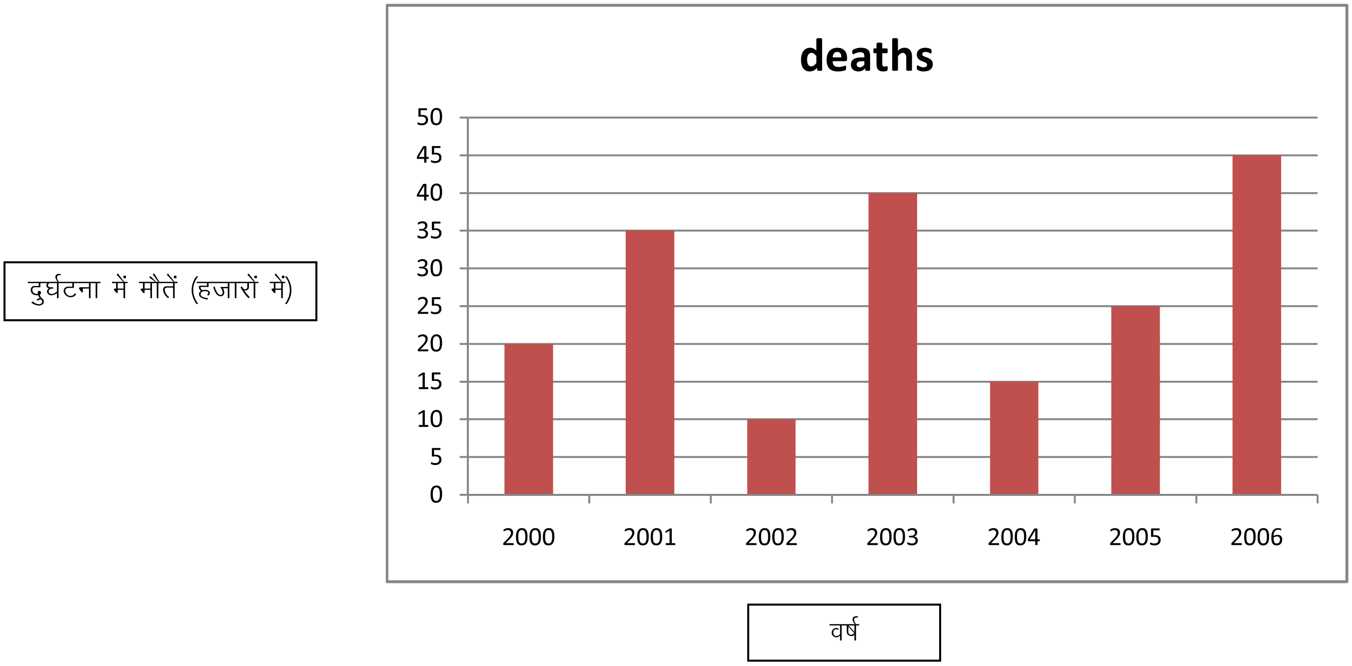


उत्तर – कुल मौतें $= 50000$

अ. दोपहिया वाहन से होने वाली मौतें $= \frac{28}{100} \times 50000 = 14000$

ब. अन्य मोटर वाहनों से होने वाली मौतें $= \frac{14}{100} \times 50000 = 7000$

प्रश्न – 2 किसी सड़क दुर्घटना में मरने वालों का प्रतिशत वर्षवार निम्न आलेख अनुसार दर्शाया गया है।



अ. वर्ष 2002 व 2005 में होने वाली मौतों का अनुपात

ब. 2006 में हुई मौते 2005 मे हुई मौतो से कितने प्रतिशत ज्यादा है।

हल–1 (1) 2002 की संख्या : 2005 की संख्या

10:25

2:5

(2) 2006 मे हुई मौते = 45000

2005 मे हुई मौते = 25000

ज्यादा मौते = 45000-25000

= 20000

2006 मे बढा % $= \frac{2000}{25000} X\, 100$

= 80%